



Dans le doute, escomptons moins

Taux d'escompte et incertitudes

Pauline CULIOLI
Lou-Lélia DEMERLIAC
Rémi TURQUIER

Encadrant :
Guy MEUNIER

Mai 2021

Résumé

Comment trouver un juste équilibre entre investir pour le futur et satisfaire les générations présentes, quand l'avenir est incertain ? L'escompte permet d'évaluer la valeur présente de projets dont les bénéfices s'étendent sur plusieurs périodes, en affectant à chaque période un poids différent. Ce mémoire passe en revue les principales avancées sur l'escompte en situation d'incertitude dans la littérature économique. Nous trouvons que l'incertitude sur la croissance et sur le taux de rendement du capital conduisent à utiliser un taux d'escompte décroissant, et que la forme particulière de l'incertitude sur le réchauffement climatique montre les limites de l'analyse coûts-bénéfices. Nous faisons ensuite une proposition d'intégration de l'incertitude normative dans un cadre simple. Sous certaines hypothèses, nous montrons que l'incertitude normative aboutit à une formule de Ramsey modifiée dans laquelle le taux d'escompte est aussi décroissant, et décroît d'autant plus vite que l'incertitude normative est grande. Ce résultat s'ajoute aux arguments existants en faveur de très faibles taux d'escompte pour le long terme.

Sommaire

1	Incertitude sur la croissance	2
1.1	La formule de Ramsey	2
1.1.1	Impatience, inégalité intertemporelle et croissance	2
1.1.2	La formule de Ramsey étendue à un cadre incertain	3
1.1.3	Calibration de la formule de Ramsey étendue	4
1.2	La structure temporelle du taux d'escompte	5
1.2.1	Un taux d'escompte unique à chaque date mais variable au cours du temps	5
1.2.2	Comment varie le taux d'escompte à long terme?	5
2	Incertitude sur le taux de rendement du capital	8
2.1	L'argument de Weitzman (1998) - Un taux d'escompte décroissant vers sa valeur minimale	8
2.2	La réponse de Gollier (2004) : un taux d'escompte croissant vers sa valeur maximale	9
2.3	Le compromis de Gollier et Weitzman (2010)	9
2.4	Le prolongement de Traeger (2013)	10
3	Incertitude sur le réchauffement climatique	11
3.1	Le <i>climate beta</i>	11
3.1.1	Principe général	11
3.1.2	L'apport de Dietz, Gollier et Kessler	12
3.2	<i>Fat tail risk</i>	14
3.2.1	Le " <i>dismal theorem</i> " de Weitzman	14
3.2.2	La critique de Nordhaus	16
4	Incertitude normative	18
4.1	L'incertitude normative sur l'escompte	18
4.2	La formule de Ramsey en incertitude normative	19
4.3	Pistes de prolongements	23
5	Conclusion	25
	Références	27
	Annexes	31
1	La formule de Ramsey dans un cadre certain	31
2	Espérance de l'exponentielle d'une variable aléatoire normale	32
3	Taux de croissance de la consommation dans un cadre incertain	33
4	Construction du taux de croissance de la consommation par tête	33
5	Code R utilisé pour la calibration de la formule de Ramsey étendue (partie 1.1.3)	33
6	Comportement de la loi de puissance pour de petites valeurs de la consommation	36
7	Formule de Ramsey avec une incertitude normative sur ρ et sur γ	36

Introduction

Faut-il lutter contre le réchauffement climatique ? Diminuer très fortement les émissions de gaz à effet de serre permettrait de préserver l'environnement et la qualité de vie des générations futures. Toutefois, cette diminution aurait un coût élevé aujourd'hui. Comment trouver un juste équilibre entre investir pour l'avenir et satisfaire les générations présentes ?

En économie, un outil est utilisé pour prendre des décisions qui impliquent différentes périodes temporelles : l'escompte. L'idée est d'accorder une certaine valeur à chaque période, afin de pouvoir faire des comparaisons. Le *facteur d'escompte* de la consommation est la valeur accordée aujourd'hui à un flux de consommation futur. Par exemple, si notre facteur d'escompte pour l'année prochaine vaut 0,5, cela signifie que nous sommes indifférents entre consommer une certaine quantité aujourd'hui et consommer deux fois moins dans un an. Appliquer ce principe au niveau de la société permet de faire des choix qui impliquent différentes périodes temporelles. On parle alors de facteur d'escompte social de la consommation. On accorde généralement de moins en moins de valeur à la consommation future, à mesure qu'elle est éloignée dans le temps. En d'autres termes, le facteur d'escompte social de la consommation diminue avec le temps.

Le *taux d'escompte* est le taux auquel le facteur d'escompte diminue. Le taux d'escompte social de la consommation est le taux de rendement minimal qu'un projet d'investissement doit avoir pour augmenter le bien-être général. Si un projet pour l'avenir rapporte moins que le taux d'escompte social de la consommation, il ne faut pas investir dans ce projet. Dans une économie simplifiée en concurrence pure et parfaite, le taux d'escompte social est égal au taux d'intérêt à l'équilibre. En effet, si le taux d'intérêt était plus faible, il faudrait investir jusqu'à ce que ce ne soit plus avantageux, c'est-à-dire jusqu'à ce que le taux d'intérêt soit égal au taux d'escompte.

Dans ce mémoire, notre approche est principalement normative : nous cherchons la manière d'escompter qui permette de prendre les meilleures décisions, à l'échelle de la société. Par raccourci, nous parlerons souvent de « facteur d'escompte » et de « taux d'escompte » pour désigner le facteur et le taux d'escompte sociaux de la consommation.

Une bonne décision doit souvent tenir compte de nombreuses incertitudes. Ceci est particulièrement vrai quand les décisions concernent le long terme. Une politique de réduction des émissions de CO₂ aura potentiellement des effets pendant plusieurs centaines d'années. Nous ne pouvons pas prédire avec certitude l'efficacité de d'une telle politique, ni l'ampleur du réchauffement climatique dans 500 ans, ni la manière dont nos technologies auront progressé d'ici là. Pourtant, toutes ces informations sont importantes pour choisir de mener cette politique. Comment les différentes sources d'incertitudes jouent-elles alors sur le taux d'escompte optimal ?

Ce mémoire est organisé en quatre parties. Dans chaque partie, nous nous intéressons à un type d'incertitude. Nous commençons par montrer que l'incertitude sur la croissance future est un argument en faveur d'un taux d'escompte plus faible, en particulier lorsqu'il concerne le très long terme (1). Dans la partie 2, nous étudions l'incertitude sur le taux de rendement du capital à travers la fameuse controverse Gollier-Weitzman. Dans notre troisième partie, nous nous intéressons à la manière dont l'incertitude sur réchauffement climatique influence le *climate beta*, un paramètre d'évaluation des investissements climatiques. Nous voyons aussi que la forme particulière de l'incertitude sur le réchauffement climatique pose des difficultés pour l'analyse coûts-bénéfices classique. Notre quatrième partie aborde l'incertitude normative sur l'escompte : l'incertitude sur la valeur qu'il faut accorder à différents états du monde. Ce mémoire repose principalement sur l'analyse de travaux existants, à l'exception de la partie 4, dans laquelle nous proposons une extension d'un modèle.

1 Incertitude sur la croissance

1.1 La formule de Ramsey

Dans un article fondateur, Ramsey (1928) établit une relation entre le taux d'intérêt optimal, la variation de la consommation et l'utilité marginale. Cette relation a été reprise dans des modèles de macroéconomie en équilibre général (Koopmans 1963 ; Cass 1965), et est aujourd'hui connue sous le nom de formule de Ramsey. La formule de Ramsey est une référence fondamentale de la plupart des travaux économiques sur l'escompte. Cette section présente d'abord la formule de Ramsey dans un cadre certain (1.1.1), puis montre comment elle peut être étendue à une situation où la croissance future est incertaine (1.1.2). Nous calibrons ensuite la formule de Ramsey étendue à partir de données empiriques (1.1.3).

1.1.1 Impatience, inégalité intertemporelle et croissance

Considérons une économie simplifiée, où un individu représentatif et immortel maximise son utilité¹. On note c_t sa consommation et $u(c_t)$ son utilité au temps $t \in \mathbb{R}^+$. On suppose que u est strictement croissante et strictement concave. À la date 0, l'utilité intertemporelle du ménage est donnée par :

$$U_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

Le paramètre $\rho > 0$ est le taux de préférence pure pour le présent. Il représente l'impatience de l'individu représentatif.

On note k_t le capital déteu au temps t , et r_t le taux d'intérêt au temps t . Le programme de l'individu représentatif est alors :

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (k_t)_{t > 0}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt \right\}$$

La résolution de ce programme donne, entre autres, les deux conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_t & = e^{-\rho t} u'(c_t) \\ \lambda_t r_t & = -\dot{\lambda}_t \end{cases}$$

où λ_t est la covariable d'état du problème d'optimisation.

Après des calculs détaillés en annexe, on a :

$$r_t = \rho + \frac{-c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} \times \frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

En supposant que le coefficient relatif d'aversion pour le risque $\gamma = \frac{-c_t u''(c_t)}{u'(c_t)}$ et le taux de croissance $g = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$ sont constants, on obtient la formule de Ramsey :

$$r = \rho + \gamma g$$

Comme ce modèle est en concurrence pure et parfaite, le taux d'intérêt d'équilibre est égal au taux d'escompte social. En effet, si le taux d'intérêt était plus grand que le taux d'escompte, l'agent représentatif investirait jusqu'à rétablir l'égalité.

1. Cette section s'appuie en grande partie sur le cours de Macroéconomie 1 donné par Olivier Loisel à l'ENSAE en 2020.

Le taux d'escompte socialement optimal est donc déterminé par la somme de deux termes. Le premier est la préférence pure pour le présent. Plus l'individu représentatif est impatient, plus il accorde d'importance au présent par rapport à l'avenir. Le second terme traduit l'effet de richesse : plus la consommation augmente vite, moins il est important d'investir, puisque les générations futures seront mieux loties que les générations présentes. Cet effet est d'autant plus fort que γ est grand. Pour cette raison, on appelle aussi γ le coefficient relatif d'aversion à l'inégalité intertemporelle (Gollier 2012).

1.1.2 La formule de Ramsey étendue à un cadre incertain

En réalité, la croissance est incertaine. La précaution est le premier des huit motifs d'épargne identifiés par Keynes (1936). Comment intégrer cet effet dans la formule de Ramsey ?

Pour simplifier, considérons avec Gollier (2012) un cadre à deux périodes $t \in \{0, 1\}$ où la consommation c_1 est incertaine. On suppose que $c_1 = c_0 e^X$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ le taux de croissance de la consommation. Considérons maintenant un investissement marginal à la période 0 qui produit un bénéfice certain e^r à la période 1. Le taux d'escompte est le taux r tel que cet investissement préserve l'utilité intertemporelle. C'est le cas si, et seulement si la perte d'utilité à la période 0 est égale au gain d'utilité à la période 1 :

$$u'(c_0) = e^{-\rho} \mathbb{E} [e^r u'(c_1)],$$

où ρ est le taux de préférence pure pour le présent. Cette condition est équivalente à :

$$r = \rho - \ln \frac{\mathbb{E} [u'(c_1)]}{u'(c_0)}. \quad (1.1)$$

Supposons à présent que la fonction d'utilité instantanée est de la forme

$$u : c \mapsto \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Le paramètre γ est le coefficient relatif d'aversion pour le risque, et il est constant. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [u'(c_1)]}{u'(c_0)} &= \frac{\mathbb{E} [c_1^{-\gamma}]}{c_0^{-\gamma}} \\ &= \frac{c_0^{-\gamma} \mathbb{E} [e^{-\gamma X}]}{c_0^{-\gamma}} \\ &= \mathbb{E} [e^{-\gamma X}] \\ &= e^{-\gamma(\mu - 0,5\gamma\sigma^2)}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est démontrée en annexe.

L'équation 1.1 devient alors :

$$\begin{aligned} r &= \rho + \gamma\mu - 0,5\gamma^2\sigma^2 \\ &= \rho + \gamma(\mu + 0,5\sigma^2) - 0,5\gamma\sigma^2 - 0,5\gamma^2\sigma^2. \end{aligned}$$

Comme g , le taux de croissance de la consommation espérée, est égal à $\mu + 0,5\sigma^2$ (démonstration en annexe), on obtient finalement :

$$r = \rho + \gamma g - 0,5\gamma(\gamma + 1)\sigma^2. \quad (1.2)$$

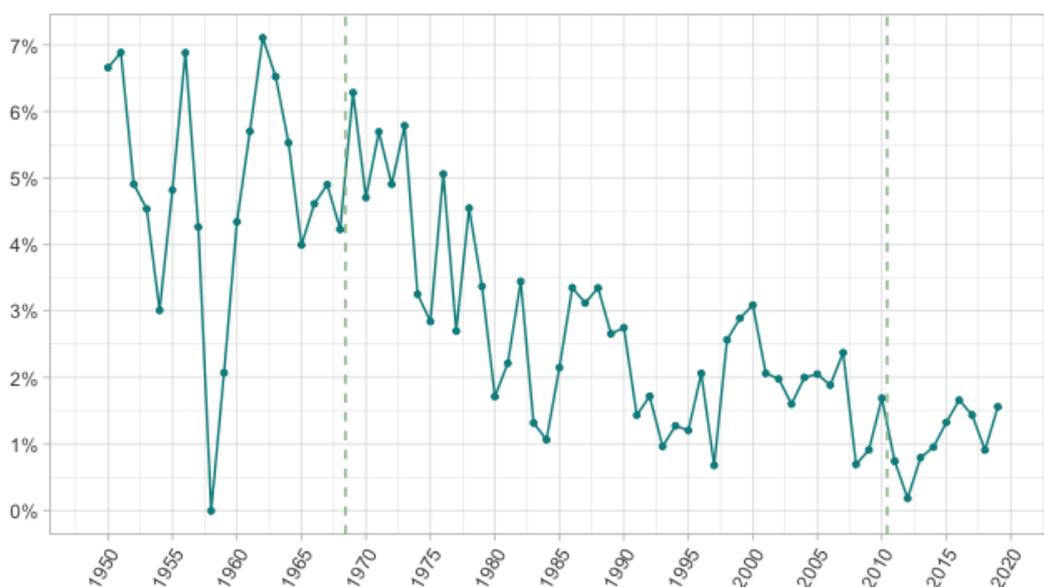
Cette équation est la formule de Ramsey étendue. On retrouve le taux de préférence pure pour le présent ρ , ainsi que l'effet richesse représenté par γg . Un troisième terme intervient

maintenant dans la détermination du taux d'escompte social optimal. Il représente l'effet de précaution. Il est négatif, et dépend de σ^2 : plus la croissance de la consommation est incertaine, plus il est bon d'investir pour faire face à une croissance potentiellement faible.

1.1.3 Calibration de la formule de Ramsey étendue

Dans la formule de Ramsey étendue (1.2), deux paramètres empiriques doivent être spécifiés : la moyenne g du taux de croissance de la consommation, et son écart-type σ . Pour calibrer ces deux paramètres, Gollier (2011) utilise des séries de taux de croissance dans différents pays. Pour la France, il obtient $g = 1,75\%$ et $\sigma = 1,57\%$. En fixant $\rho = 0$ et $\gamma = 2$, cela le conduit à un taux d'escompte de $3,43\%$. Nous essayons ici de reproduire ce résultat.

Nous disposons des taux de croissance de la consommation finale et du PIB de 1950 à 2019 (Insee 2020), que nous corrigeons de la croissance de population. Le graphique 1.1 représente l'évolution du taux de croissance de la consommation finale en France. La période délimitée par les lignes pointillées est celle utilisée par Gollier (2011).



Graphique 1.1 – Évolution du taux de croissance de la consommation finale par habitant en France

Les résultats que nous obtenons sont présentés dans le tableau 1.1. Comme Gollier (2011), nous fixons $\rho = 0$ et $\gamma = 2$. Pourtant, même en considérant la croissance du PIB sur la même période que Gollier (2011), nous obtenons une calibration sensiblement différente, qui conduit à un taux d'escompte de 5% . La différence avec les résultats de Gollier pourrait en partie s'expliquer par le fait que les données que nous avons utilisées ne sont pas corrigées de l'inflation.

Série utilisée	Période	g (%)	σ (%)	r (%)
Taux de croissance du PIB par habitant	1969 - 2010	2,56	1,94	5,00
Taux de croissance du PIB par habitant	1950 - 2019	3,11	2,18	6,08
Taux de croissance de la consommation finale par habitant	1969 - 2010	2,65	1,43	5,24
Taux de croissance de la consommation finale par habitant	1950 - 2019	3,03	1,88	5,95

Tableau 1.1 – Estimations de g et σ selon les données et la période considérées, et taux d'escompte correspondant pour $\gamma = 2$

Cet exercice de calibration révèle deux limites importantes de cette approche. D'une part, les résultats du tableau 1.1 montrent que la calibration sur les données historiques est très sensible à la période et à la série considérées. D'autre part, le graphique 1.1 remet fortement en cause l'hypothèse de normalité du taux de croissance. On observe une nette tendance : la croissance moyenne était plus élevée dans les années 1950 - 1980 qu'aujourd'hui. La variance du taux de croissance a elle aussi diminué. De plus, il peut être pertinent de ne pas seulement s'appuyer sur des données historiques pour prédire la croissance future à l'échelle de plusieurs siècles. Les parties 1.2 et 3.2 abordent d'autres manières de tenir compte de l'incertitude sur la croissance.

1.2 La structure temporelle du taux d'escompte

1.2.1 Un taux d'escompte unique à chaque date mais variable au cours du temps

D'après Gollier (2005), l'utilisation (fréquente) d'un taux d'escompte identique pour différents horizons temporels n'a pas de justification théorique. Si l'on considère un investissement marginal à la période 0 qui produit un bénéfice certain e^{rt} à la période t , l'équation 1.1 devient alors :

$$r_t = \rho - \frac{1}{t} \ln \frac{\mathbb{E}[u'(c_t)]}{u'(c_0)} \quad (1.3)$$

A priori, il existe donc **des** taux d'escompte, selon les différentes périodes t . Gollier (2005) note d'ailleurs que, empiriquement, les taux d'intérêt du marché varient selon leur maturité. Toutefois, la courbe des taux du marché ne va pas au-delà de 30 ans car il n'existe alors plus d'actif financier sans risque. On passe alors dans une approche normative : plus le taux d'escompte choisi est élevé, plus le nombre de projets d'investissement à valeur actualisée nette (VAN) positive sera faible. On pourrait choisir de ne pas actualiser et de considérer que chaque période a la même valeur, mais, dans cette approche normative, les efforts en vue du très long terme risqueraient alors selon Gollier de sacrifier les générations à moyen terme (par exemple, l'entretien de nombreuses infrastructures n'aurait alors plus une VAN positive et elles se dégraderaient peu à peu).

1.2.2 Comment varie le taux d'escompte à long terme ?

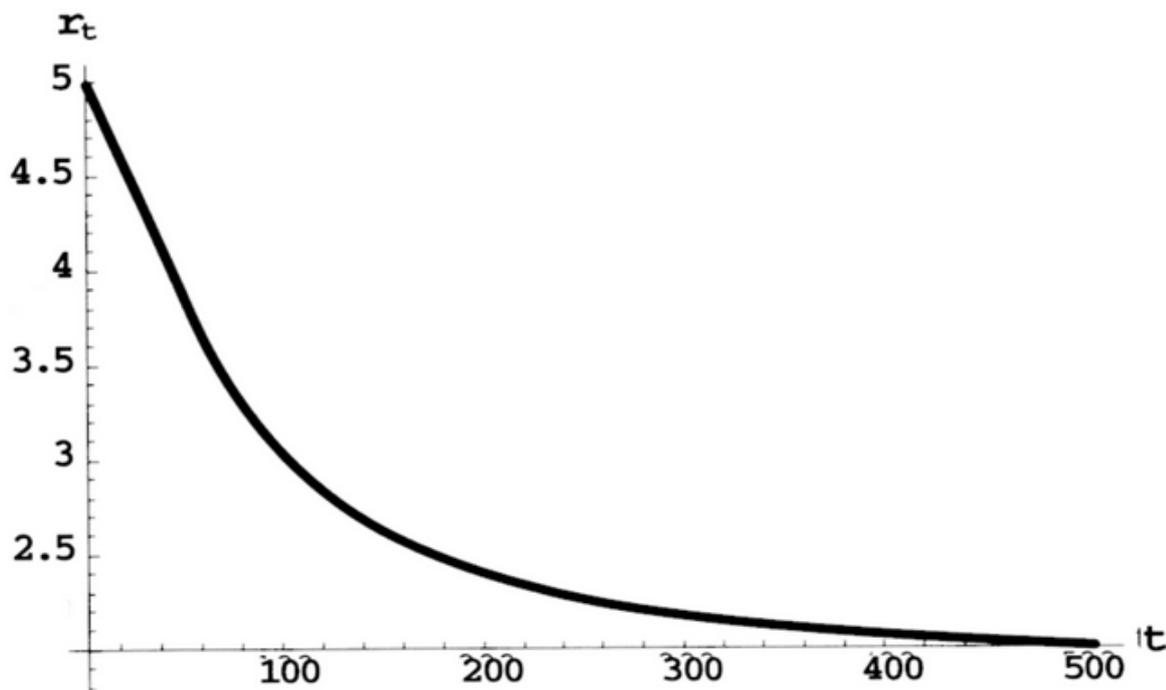
Si le taux d'escompte varie au fil du temps, peut-on dégager une tendance ? Selon Gollier (2005), il y a trois possibilités si l'on s'intéresse aux chocs sur la croissance. Si l'on suppose que les chocs macro-économiques sur la croissance sont indépendants, on n'anticipe ni accélération ni décélération, donc la courbe des taux est plate (les effets richesse et précaution se compensent, et les taux d'actualisation de court terme et de long terme sont identiques). Si, en revanche, on suppose que les chocs sont positivement corrélés dans le temps, alors ρ_t sera croissant avec t et la courbe est décroissante. Enfin, si l'on suppose qu'ils sont négativement corrélés, c'est l'inverse.

Depuis plus de deux siècles, la croissance est d'environ 2% par an. Sur des horizons courts, de l'ordre de la décennie, on peut ainsi formuler l'hypothèse d'une corrélation sérielle négative de la croissance, c'est-à-dire d'un phénomène de retour à la moyenne, pour expliquer une courbe des taux du marché habituellement croissante. Mais l'on ne peut pas supposer que la croissance va rester stable, en raison par exemple de la raréfaction des ressources, de la prise d'ampleur de la conscience écologique, des coûts liés à la pollution. . . De plus, si l'on considère les précédents millénaires, la croissance a longtemps été quasi-nulle. Il y a donc une incertitude sur les valeurs de la croissance dans un futur lointain. Pour des horizons longs, de l'ordre du siècle, il faut donc envisager d'autres scénarios que celui d'un perpétuel retour à la moyenne. Christian Gollier en considère deux dans son article :

- une tendance de croissance de 2% par an, comme observée pendant deux siècles, avec une volatilité autour de cette tendance,

— une économie en stagnation, c'est-à-dire une tendance de croissance nulle, également avec une volatilité autour de la tendance.

Supposons que chaque année t il existe une probabilité de 1% que l'économie mondiale bascule de l'état qui prévalait en $t - 1$ vers l'autre état (suivant un processus markovien). La probabilité de basculement étant faible, il y a une forte corrélation sérielle positive des taux de croissance. Ainsi, l'incertitude augmente avec l'horizon temporel et on obtient un taux d'actualisation décroissant au fil du temps. C'est la première méthode qu'utilise Christian Gollier pour soutenir la thèse d'un taux d'escompte décroissant. Selon ses estimations, la conclusion normative de cette réflexion est que le taux d'actualisation efficace varie de 5 à 3% en-dessous de 100 ans, et vaut environ 2% au-delà de 500 ans.



Graphique 1.2 – Taux d'escompte efficaces en situation de risque de stagnation sur le long terme - Tiré de Gollier (2005)

Une deuxième méthode permet à Christian Gollier d'arriver à la même conclusion (à de légères différences quantitatives près). Supposons désormais que l'on ait une tendance de croissance stable, seulement ponctuée de chocs transitoires. Cette tendance aurait commencé par exemple au moment de la révolution industrielle, mais elle est aujourd'hui inconnue car elle est "cachée" par les chocs. D'après les estimations de Gollier, deux valeurs sont possibles pour la tendance : $g = 3\%$ ou $g = 0\%$. De plus, il y a trois chances sur quatre aujourd'hui pour que $g = 3\%$. Toutefois, au fil du temps, la probabilité attribuée à cet état du monde est modifiée, par apprentissage bayésien, selon la croissance observée. Ainsi, il y a également ici une corrélation positive des taux de croissance : des taux hauts nous font pencher pour $g = 3\%$, tandis que des taux bas nous font pencher vers $g = 0\%$. Par précaution, le taux d'actualisation doit donc, ici aussi, être décroissant. On trouve avec cette méthode des taux efficaces de 5 à 2% en-dessous de 100 ans, et d'environ 1% au-delà de 500 ans.

Toutefois, Gollier (2012) propose une autre approche, la modélisation de la croissance par une marche aléatoire, qui conduit à une courbe des taux plate. En effet, il modélise la croissance par un processus indépendant et identiquement distribué :

$$\begin{cases} c_{t+1} = c_t e^{x_t} \\ x_0, x_1, \dots \text{ iid} \end{cases}$$

On réécrit alors l'équation 1.3 :

$$r_t = \rho - \frac{1}{t} \ln \frac{\mathbb{E} [u'(c_0 \prod_{\tau=0}^{t-1} e^{x_t})]}{u'(c_0)} \quad (1.4)$$

En posant γ l'aversion au risque et en utilisant l'indépendance, on a :

$$r_t = \rho - \frac{1}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} \ln \mathbb{E} [e^{\gamma x_t}] \quad (1.5)$$

Et comme le processus est iid :

$$r_t = \rho - \ln \mathbb{E} [e^{\gamma x_1}] \quad (1.6)$$

Ainsi, dans le cas d'une fonction d'utilité en puissance et d'un processus iid, la courbe des taux d'escompte efficients est complètement plate (puisque la fonction ne dépend plus du temps).

Toutefois, si la marche aléatoire a une tendance haussière, c'est-à-dire une moyenne de croissance économique positive, l'effet de richesse croît exponentiellement avec l'horizon temporel, et donc le facteur d'escompte décroît exponentiellement, ce qui donne un taux d'escompte constant. La tendance haussière implique également une incertitude sur la consommation qui croît exponentiellement, ainsi que l'effet de précaution qui l'accompagne. Ces deux effets (richesse et précaution) se compensent finalement ici et la courbe des taux est plate.

Il existe donc plusieurs façon de modéliser les incertitudes sur la croissance, qui n'aboutissent pas toujours aux mêmes conclusions quant à l'évolution du taux d'escompte au cours du temps. Il semble toutefois que la conclusion soit souvent un taux d'escompte décroissant au fil du temps.

2 Incertitude sur le taux de rendement du capital

L'incertitude sur la croissance nous a conduits à réfléchir aux variations du taux d'escompte au cours du temps, considérons désormais une autre forme d'incertitude capable d'influencer la façon dont nous actualisons des bénéfices futurs : l'incertitude sur le taux de rendement du capital.

2.1 L'argument de Weitzman (1998) - Un taux d'escompte décroissant vers sa valeur minimale

L'incertitude sur le taux de rendement du capital est le cadre de la controverse entre Martin L. Weitzman et Christian Gollier. Tout commence avec un article de Weitzman (1998), dans lequel il étudie cette forme d'incertitude de long terme. Son raisonnement est le suivant.

Supposons qu'il existe n scénarios possibles pour l'état futur de l'économie. Le temps s'écoule en périodes discrètes t . À chaque état $j = 1, \dots, n$ est associé un taux d'intérêt variable au cours du temps $r_j(t)$, et une probabilité de réalisation p_j avec $p_j > 0$ et $\sum p_j = 1$. Juste avant la période 0 (ce que Weitzman appelle donc 0^-), une décision doit être prise : investir ou non une somme δ empruntée, ce qui rapporterait un bénéfice certain ε dans une période future t . Ce qui n'est pas certain, ce sont donc les autres possibilités d'investissement qui pourraient s'offrir à nous dès la période 0. En effet, au moment de prendre la décision, nous ne connaissons pas l'état effectif du monde, auquel sera associé un taux d'intérêt r_j valable de la période $t = 0$ à la période $t = \infty$. Cette modélisation a du sens car les chocs de productivité peuvent avoir des effets permanents lorsque l'on se place sur le long terme. On a alors un taux d'escompte effectif $R^W(t)$ qui satisfait

$$\exp(-R^W(t)t) = \sum_{i=1}^n p_i \exp(-r_i t)$$

Donc

$$R^W(t) = -\frac{1}{t} \ln\left(\sum_{i=1}^n p_i \exp(-r_i t)\right)$$

Je sais que mon bénéfice ε me permettra en t de rembourser mon emprunt. Je peux donc emprunter en 0 $\varepsilon \cdot \exp(-R^W(t) \cdot t)$, ce qui m'amènera à rembourser exactement ε . À la date t , l'intégralité des bénéfices est donc absorbée dans le remboursement, mais en 0 le montant emprunté peut être supérieur au coût de l'investissement. Le raisonnement est donc ici mené en actualisant vers la période 0. À partir de ce raisonnement et de l'égalité précédente, on en déduit que l'investissement doit être fait si et seulement si

$$\varepsilon \cdot \exp(-R^W(t) \cdot t) \geq \delta \tag{2.1}$$

De plus, le taux d'escompte effectif du modèle de Weitzman a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R^W(0) &= \sum_{i=1}^n p_i r_i \\ \frac{dR^W(t)}{dt} &< 0 \\ R^W(\infty) &= \min(r_i) \end{aligned}$$

2.2 La réponse de Gollier (2004) : un taux d'escompte croissant vers sa valeur maximale

La démonstration de Weitzman est remise en question par Gollier (2004). Ce dernier prend le point de vue temporel inverse et aboutit à des résultats contraires. Dans le scénario de Gollier, on pourrait emprunter δ en 0 pour investir cette somme et gagner ε en t , ce qui nécessitera de rembourser $\delta \cdot \exp(r_i t)$. Ici, l'investissement doit donc être fait si et seulement si

$$\varepsilon \geq \delta \cdot \exp(R^G(t) \cdot t) \quad (2.2)$$

avec

$$\exp(R^G(t)t) = \sum_{i=1}^n p_i \exp(r_i t)$$

Cela revient à écrire

$$R^G(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\sum_{i=1}^n p_i \exp(r_i t)\right)$$

À partir de ce raisonnement, il obtient un taux d'escompte effectif $R^G(t)$ qui satisfait

$$R^G(0) = \sum_{i=1}^n p_i r_i$$

$$\frac{dR^G(t)}{dt} > 0$$

$$R^G(\infty) = \max(r_i)$$

Le raisonnement est ici mené en actualisant vers la période t . On cherche à savoir si, après avoir emprunté en 0 la somme nécessaire à l'investissement en t , les bénéfices en t sont supérieurs au remboursement de l'emprunt.

Ainsi, bien que Gollier et Weitzman modélisent la même situation, à part pour la condition initiale $R^G(0) = R^W(0) = \sum_{i=1}^n p_i r_i$, les propriétés de $R^G(t)$ et $R^W(t)$ sont absolument opposées : $R^W(t)$ décroît vers la valeur la plus faible de r_i tandis que $R^G(t)$ croît vers la valeur la plus élevée de r_i . C'est le paradoxe à l'origine de la controverse Gollier-Weitzman.

2.3 Le compromis de Gollier et Weitzman (2010)

Dans Gollier et Weitzman (2010), les deux protagonistes de la controverse arrivent à une conclusion commune. L'opposition entre les deux articles provient d'une mauvaise prise en compte du risque (l'incertitude en 0^-), et de l'aversion pour le risque. Si l'on utilise uniquement l'utilité marginale présente pour exprimer l'aversion au risque, on retrouve les conclusions de Weitzman. Si l'on utilise uniquement l'utilité marginale future, on retrouve les conclusions de Gollier. Les deux raisonnements aboutissent donc à des conclusions similaires si l'on ajuste les différences de prise en compte du risque.

Toutefois, le taux d'escompte effectif qu'ils considèrent finalement comme le plus efficace pour la prise de décision est qualitativement identique à celui de Weitzman, avec l'idée d'un taux d'escompte effectif décroissant vers sa plus faible valeur possible (il y a seulement quelques différences quantitatives liées à une nouvelle prise en compte de l'incertitude). Cette décroissance est justifiée par l'existence dans le modèle de chocs sur la productivité du capital et de risques sur la croissance de la consommation, qui sont permanents et conduisent à des risques croissants au fil du temps. Le taux d'escompte diminue donc, dans une logique de précaution.

2.4 Le prolongement de Traeger (2013)

Pour Traeger (2013), la conclusion que Weitzman et Gollier apportent à leur controverse est incomplète. L'ajustement en probabilités rend selon lui difficile à voir les mécanismes économiques qui sous-tendent l'effet Gollier-Weitzman. Il se propose donc de "démêler" les effets à l'origine de la controverse.

Les taux d'escompte croissants comme décroissants ont des justifications, qui correspondent à deux effets par lesquels l'incertitude affecte la valeur des bénéfices. Le premier effet est celui sur la croissance économique, qui augmente le risque sur la consommation future et conduit à des taux décroissants (effet Weitzman). Le deuxième effet affecte la productivité marginale de l'investissement, il augmente au cours du temps la valeur accordée aux bénéfices de l'investissement et donne des taux croissants (effet Gollier). Ces effets conduisent tous deux à rendre un projet d'autant plus attractif que sa maturité est longue.

Tout d'abord, l'escompte de Weitzman est adapté en l'absence de chocs sur la consommation (il n'y en a pas dans son modèle, à partir de la période 0). Aussi, de façon générale, le taux d'escompte sur la consommation est décroissant quand on a une croissance avec corrélation sérielle. En revanche, l'escompte de Gollier reflète l'avantage relatif d'un projet risqué sur un projet certain. Cette analyse est pertinente si la croissance est ou bien certaine ou bien indépendante du bénéfice lié à l'investissement. L'effet Gollier disparaît si les bénéfices sont parfaitement corrélés avec les taux d'intérêt du marchés.

Christian Traeger étudie ainsi deux cas d'investissement :

- Pour un projet certain, l'investissement augmente le bien-être de l'agent ssi $R^{cert} - R^W(t) > 0$ avec R^{cert} l'équivalent certain du taux d'escompte. Puisque $R^W(t)$ est décroissant, le surplus moyen annuel du projet certain augmente. Plus le bénéfice est à un horizon lointain moins la productivité requise pour le rendre intéressant est élevée.
- Pour un projet incertain, l'investissement augmente le bien-être de l'agent ssi $R^G(t) - R^W(t) > 0$. Puisque $R^W(t)$ est décroissant, le surplus moyen annuel du projet certain augmente. Plus le bénéfice est à un horizon lointain plus il est intéressant car $R^W(t)$ est décroissant tandis que $R^G(t)$ est croissant.

Pour Traeger, il faut relativiser la conclusion de la controverse Gollier-Weitzman. En effet, elle est posée dans le cadre d'une corrélation sérielle parfaite entre les états de l'économie au cours du temps, qui est un cas particulier intéressant mais qui, pour Traeger, est un modèle trop simplifié pour être utilisé pour orienter quantitativement des politiques publiques.

3 Incertitude sur le réchauffement climatique

Nous avons considéré les incertitudes sur la croissance et sur taux de rendement du capital, qui jouent sur le taux d'escompte. Le taux d'escompte est un paramètre crucial pour les investissements climatiques en raison de leur horizon temporel très long. Qu'en est-il donc des incertitudes liées au réchauffement climatique ?

S'intéresser au problème du réchauffement climatique, c'est faire face à de nombreuses incertitudes structurelles (Weitzman 2009b). D'une part, il est difficile de prédire à quel point la température va augmenter suite à une augmentation de la pollution. D'autre part, les conséquences de cette augmentation de température sont également incertaines. Non seulement les climatologues travaillent avec des variables aléatoires, mais leurs distributions elles-mêmes ne sont pas connues avec certitude. Il y a également des incertitudes sur l'efficacité des technologies de lutte contre le réchauffement climatique, et sur le progrès qu'elles connaîtront à l'avenir.

Ces paramètres (la sensibilité du climat, la technologie) sont pourtant centraux pour l'analyse coûts-bénéfices climatique. Nous allons étudier les conséquences de l'incertitude climatique sur l'escompte temporelle. Nous nous intéressons d'abord au *climate beta*, un paramètre utilisé pour évaluer les investissements climatiques, puis au problème du risque des distributions à queue épaisse.

3.1 Le *climate beta*

3.1.1 Principe général

Nous considérons ici les projets ayant pour but de lutter contre le réchauffement climatique. Ces projets ont des effets positifs sur le très long terme, plusieurs centaines d'années parfois. Le taux d'escompte utilisé pour les évaluer est donc crucial et sujet à débat : pour des horizons temporels aussi longs, il est nécessaire de prendre en compte des incertitudes sur leurs bénéfices.

Dietz, Gollier et Kessler (2018) reprennent le modèle CCAPM (*Consumption-based Capital Asset Pricing Model*) de Lucas (1978), où le taux d'intérêt pour un investissement particulier est donné par

$$r = r_f + \beta\pi$$

où r_f est le taux d'intérêt sans risque et π la prime de risque. β est défini comme l'élasticité du bénéfice net apporté par le projet par rapport à la consommation agrégée. Le bêta est un paramètre propre à un investissement précis. Dans la suite, nous nous entendons par "*climate beta*" un bêta agrégé pour l'ensemble des investissements climatiques. Dans les études empiriques, ce bêta agrégé est une moyenne des différents bêtas observés (Görgen et al. 2018). Le signe du *climate beta* fait débat dans la littérature.

Si le bêta est négatif, il y a une corrélation négative entre la consommation et le bénéfice du projet. Plus le réchauffement climatique fait diminuer la consommation, plus on est enclin à investir dans des projets visant à en diminuer les effets. Ces investissements jouent donc un rôle assurantiel. Le taux d'intérêt effectif est alors plus bas que le taux d'intérêt sans risque. En effet, cet investissement est plus avantageux dans les "mauvais états du monde", les états où la consommation est basse. Une unité de consommation supplémentaire y est plus appréciée que quand la consommation est déjà élevée (décroissance de l'utilité marginale). On est prêt

à escompter moins les bénéfices futurs. De façon équivalente, on est prêt à payer cher cet investissement.

Ainsi, d'après Sandsmark et Vennemo (2007), les investissements climatiques permettent de s'assurer contre le risque sur la consommation provoqué par le réchauffement climatique. Ils supposent d'une part que le risque climatique est endogène, c'est-à-dire que les investissements climatiques diminuent la probabilité que le réchauffement climatique ait des effets graves. D'autre part, le réchauffement climatique a un impact négatif sur l'activité économique. Dans ce cadre, plus le risque climatique est élevé, plus le taux d'intérêt doit être bas.

Un autre pan de la littérature est compatible avec un scénario différent, menant à un *climate beta* positif : si le progrès technique amène de la croissance, et que cette croissance aboutit elle-même à des émissions de gaz à effet de serre plus importantes, le progrès technique provoque à la fois plus de consommation et plus de réchauffement climatique, et donc un plus grand bénéfice tiré de la lutte contre ce réchauffement climatique. Il y a une corrélation positive entre le niveau de consommation et les bénéfices apportés par l'investissement. Autrement dit, cet investissement est plus avantageux dans de "bons états du monde" avec beaucoup de consommation, où une unité de consommation supplémentaire est moins appréciée. On escompte alors davantage les revenus futurs.

Nordhaus (2011) utilise le modèle RICE pour calculer le coût social du carbone. Il prend en compte l'incertitude sur le réchauffement climatique en faisant varier les différents paramètres du modèle, et aboutit entre autres à une corrélation positive entre la consommation et bénéfices tirés de la réduction du réchauffement climatique, ce qui implique un *climate beta* positif.

3.1.2 L'apport de Dietz, Gollier et Kessler

Dietz, Gollier et Kessler proposent un modèle analytique simple (Dietz, Gollier et Kessler 2018), permettant d'expliquer d'où vient le désaccord sur le signe du *climate beta*.

Soit t une date future et Y le revenu national entre 0 et t sans dégâts liés au réchauffement climatiques. On suppose que la température T est proportionnelle aux émissions de CO2 :

$$T = \omega_1 E$$

avec E les émissions de CO2 entre 0 et t et ω_1 un paramètre mesurant la sensibilité de la température aux émissions de CO2.

On suppose aussi que les émissions sont proportionnelles au revenu national :

$$E = \omega_2 Y - I_0$$

avec I_0 l'investissement visant à diminuer les émissions et ω_2 l'intensité carbone du revenu. Les dégâts liés au réchauffement climatique, exprimés en points de pourcentage du revenu national sans dégâts, sont tels que

$$D = \alpha T^k, k \geq 1$$

et on note

$$Q = q(Y, D)$$

le revenu après dégâts climatiques, q étant une fonction croissante en Y et décroissante en D . On a, d'après ce qui précède :

$$Q = q(Y, \alpha \omega_1^k (\omega_2 Y - I_0)^k)$$

On a finalement, en notant $c \in [0, 1]$ la propension à consommer en t , que la consommation en t est

$$C(I_0) = cq[Y, \alpha \omega_1^k (\omega_2 Y - I_0)^k]$$

Commençons par supposer que la source principale d'incertitude est le progrès technique exogène et neutre en émissions carbone. Dans notre modèle, il s'agit des variations de Y .

Le bénéfice B du projet est :

$$\begin{aligned} B &= \left. \frac{\partial C}{\partial I_0} \right|_{I_0=0} \\ &= -c\omega_2^{-1}hY^{k-1}q_D(Y, hY^k), \end{aligned}$$

où $h = \alpha\omega_1^k\omega_2^k$.

β peut alors être approximé par :

$$\beta \approx \frac{d \ln B / dY}{d \ln C / dY}.$$

On suppose ensuite que les dégâts climatiques sont proportionnels à Y (c'est le choix fait par Nordhaus dans le modèle RICE), soit :

$$q(Y, D = Y(1 - D)).$$

On trouve finalement que

$$\beta \approx \frac{k(1 - D)}{1 - (k + 1)D}.$$

Pour des valeurs "raisonnables" de k et D , β est toujours positif :

	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$D = 1\%$	0.50	1.01	2.04	3.09
$D = 3\%$	0.51	1.03	2.13	3.31
$D = 5\%$	0.51	1.06	2.24	3.56
$D = 10\%$	0.53	1.13	2.57	4.50
$D = 20\%$	0.57	1.33	4.00	12.00

Tableau 3.1 – Calibration du bêta lorsque la source d'incertitude est le progrès technique - Tiré de Dietz, Gollier et Kessler (2018)

Supposons maintenant que les principales sources d'incertitudes sont la sensibilité du climat aux émissions et les dégâts causés par l'augmentation de la température, c'est-à-dire ω_1 et/ou α . On suppose ici que le paramètre incertain est ω_1 , mais les mêmes résultats sont obtenus dans l'autre cas (Sandmark et Vennemo 2007). On a alors :

$$\beta \approx \frac{d \ln B / d\omega_1}{d \ln C / d\omega_1} = \frac{q(Y, hY^k)}{Dq_D(Y, hY^k)}$$

Cette valeur est toujours négative car q est décroissante en D .

Finalement, quand la principale source d'incertitude est le progrès technique (et que la structure des dégâts climatiques est multiplicative), le *climate beta* est positif, et quand la principale source d'incertitude est la sensibilité du climat, le *climate beta* est négatif. L'intuition de ce résultat est la suivante : un choc positif de progrès technique amène plus de consommation et de production, ce qui crée de la pollution et des dégâts climatiques, rendant plus attrayante la réduction de ces dégâts climatiques : il y a une corrélation positive entre la consommation future et le futur bénéfice tiré de la réduction des émissions, donc un *climate beta* positif. Si, en revanche, l'incertitude porte principalement sur la sensibilité du climat, les agents sont

amenés à utiliser l'investissement climatique comme assurance contre une potentielle chute de la consommation future due aux dégâts climatiques.

La littérature semble contradictoire car les auteurs diffèrent dans leurs hypothèses. Le modèle DICE/RICE de Nordhaus utilise des dégâts multiplicatifs et l'incertitude y porte sur le progrès technique, alors que Sandsmark et Vennemo considèrent que l'incertitude porte sur la sensibilité du climat. Que se passe-t-il si ces deux paramètres sont incertains ? Dietz, Gollier et Kessler (2018) effectuent des simulations avec DICE en introduisant une incertitude sur les chocs de productivité et sur la sensibilité climatique, et aboutissent à un bêta positif, plus faible que le bêta obtenu lorsque seuls les chocs de productivité sont connus. Cela permet de conclure que ces deux effets sur le bêta coexistent, mais que c'est l'incertitude sur la productivité qui l'emporte.

Les auteurs n'en concluent par pour autant que les investissements climatiques devraient être escompté à un taux plus grand que le taux sans risque. En effet :

- Si la structure des dégâts est additive et non multiplicative, il est plus difficile d'obtenir un bêta positif.
- Les bénéfices *non escomptés* du projet doivent être calculés en prenant en compte la croissance économique.
- Les modèles DICE/RICE et CCAPM présentent des limites et faiblesses, notamment dans leur prise en compte "fréquentiste" de l'incertitude.

Nous nous intéressons à ce dernier point dans la section suivante.

3.2 *Fat tail risk*

Les conséquences de la pollution ne sont pas connues avec certitude, même par les climatologues. Elles pourraient être catastrophiques, avec des dégâts irréparables sur les écosystèmes éradiquant la vie telle que nous la connaissons, ou relativement limitées. Weitzman résume ainsi la complexité de ce domaine d'étude : "The economics of climate change consists of a very long chain of tenuous inferences fraught with big uncertainties in every link" (Weitzman 2009b).

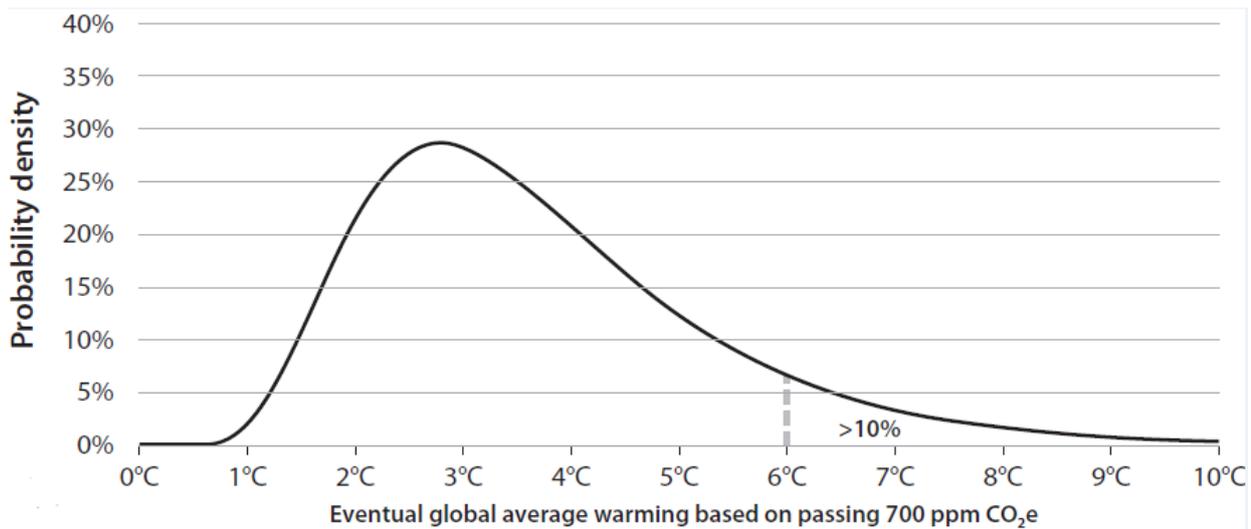
Considérons la variable aléatoire donnant la variation de la température moyenne suite à une multiplication par deux des émissions de gaz à effet de serre par rapport aux niveaux pré-industriels. Les modèles climatiques prédisent en moyenne une augmentation de 3°C, et l'écart-type est de 1.5°C.

Si cette variable aléatoire suivait une loi normale, la probabilité que l'augmentation de la température dépasse 6°C serait de 2 %. Or, d'après Weitzman et Wagner (2015), cette probabilité est plus proche de 10%. On parle de "*fat tail*", ou distribution à queue épaisse.

Les conséquences d'une telle augmentation seraient catastrophiques. Le risque étant égal à la probabilité de l'évènement multiplié par ses effets, il est ici très élevé. Weitzman souligne que la tendance à sous-estimer le risque climatique vient d'une part d'une sous-estimation des conséquences, mal connues, incertaines et difficiles à imaginer tant elles sortent de l'ordinaire, et de la sous-estimation de la probabilité des évènements catastrophiques : "Deep structural uncertainty about the unknown unknowns of what might go very wrong is coupled with essentially unlimited downside liability on possible planetary damages" (Weitzman 2011).

3.2.1 Le "*dismal theorem*" de Weitzman

L'incertitude portant sur les évènements extrêmes, ces "inconnus inconnus", ainsi que leur gravité, sont, pour Weitzman, mal prises en compte par les modèles d'analyse coûts-bénéfices climatiques. Sous certaines conditions, notamment en présence d'une distribution à queue épaisse, la perte d'utilité espérée provoquée par des risques climatiques est infinie (malgré l'escompte !),



Graphique 3.1 – Densité de l’augmentation moyenne de la température mondiale si les émissions de CO2 dépassent 700 ppm
Tiré de Weitzman et Wagner (2015)

et l’analyse coût-bénéfice classique n’est pas applicable. Il s’agit du "*dismal theorem*" de Weitzman (2009a).

Dans cet article, Weitzman se propose d’étudier les conséquences de la distribution à queue épaisse sur l’analyse coût-bénéfice (CBA) des enjeux climatiques. On considère une fonction d’utilité CRRA :

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

où C est la consommation. La croissance est la variable aléatoire

$$Y = \ln(C)$$

qui capture toutes les incertitudes jouant sur la variation de C . On considère pour simplifier que Y est une fonction de la variation de la température mondiale :

$$\begin{aligned} Y &= F(\Delta T) \\ &= G - \kappa(\Delta T)^2 \end{aligned}$$

avec G et κ des constantes positives connues.

Le taux d’escompte stochastique, ou taux de substitution intertemporel, est

$$\begin{aligned} M(C) &= \beta \frac{U'(C)}{U'(1)} \\ &= \beta \exp(-\gamma Y) \end{aligned}$$

où β est le facteur d’escompte.

On en tire le prix que l’agent est prêt à payer aujourd’hui pour avoir une unité de consommation supplémentaire à l’avenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M] &= \beta \mathbb{E} \left[\frac{U'(C)}{U'(1)} \right] \\
&= \beta \mathbb{E} [\exp(-\gamma Y)] \\
&= \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\gamma y) f(y) dy \\
&= \exp(-\delta - \gamma \mu + \frac{1}{2} \gamma^2 s^2)
\end{aligned}$$

où $\delta = -\ln(\beta)$.

La dernière égalité est valable dans le cas où Y suit une loi normale (μ, s^2) . On remarque d'ailleurs que l'on peut ainsi retrouver la formule de Ramsey étendue (voir partie 1.1.2). Le paramètre $s^2 = V[Y]$ peut s'interpréter comme la sensibilité de l'environnement au changement climatique. Intuitivement, plus l'agent a une grande préférence pour le présent, plus β est proche de 0 et $-\delta$ est grand : $\mathbb{E}[M]$ est alors petit, c'est-à-dire que l'agent n'est pas prêt à payer très cher aujourd'hui pour gagner de la consommation à l'avenir, celle-ci ayant peu de valeur pour lui vue du présent. Le paramètre s joue en sens inverse : si on sait que le changement climatique menace de façon importante l'environnement et donc la consommation, on est davantage prêt à sacrifier sa consommation présente pour consommer plus à l'avenir.

Pour l'instant, la valeur de $\mathbb{E}[M]$ peut être grande, mais elle est finie.

Supposons maintenant que μ est connu, mais pas s . Plutôt que de considérer différentes valeurs de s successivement, comme cela se fait couramment pour la CBA en situation d'incertitude, Weitzman se place dans un cadre d'apprentissage bayésien : les agents observent les valeurs successives de Y qui modifient leurs croyances. Il montre alors que la densité de Y *a posteriori*, après apprentissage, est une loi t de Student. La queue de cette loi est relativement plus épaisse que celle de la loi normale de départ, et on a

$$\mathbb{E}[M] = +\infty.$$

Ainsi $\mathbb{E}[M]$ ne peut plus être utilisé comme prix d'une unité de consommation future dans la CBA.

Weitzman schématise le processus de la façon suivante : quand s augmente, la probabilité d'une catastrophe climatique diminue de façon polynomiale, alors que l'impact de ce désastre sur l'utilité marginale augmente de façon exponentielle : l'exponentielle "gagne la course", et l'intégration nécessaire pour le calcul de $\mathbb{E}[M]$ n'est plus possible. Il note qu'il serait sans doute possible de faire en sorte de borner l'intégrale et d'avoir une espérance finie, mais que le problème sous-jacent reviendrait hanter celui qui s'y risquerait "in the form of an arbitrarily large expected stochastic discount factor, whose exact value depends sensitively upon obscure bounds, truncations, severely dampened or cut-off prior PDFs, or whatever other tricks have been used to banish the ∞ symbol".

3.2.2 La critique de Nordhaus

Dans Nordhaus (2009), Nordhaus souligne le caractère en réalité restrictif des hypothèses du *dismal theorem*. Il ne suffit pas que la densité de la loi *a posteriori* présente une queue épaisse. Comme Weitzman (Weitzman 2009a), il considère une fonction d'utilité CRRA :

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \sim -C^{1-\gamma}$$

où C est la consommation et $\gamma > 1$. Il définit l'utilité conditionnelle pour le niveau de consommation C

$$V(C) = f(C)U(C),$$

c'est à dire, schématiquement, la probabilité d'obtenir C multipliée par l'utilité tirée de C . Il choisit pour la densité $f(C)$ la loi de puissance, une loi à queue épaisse. On peut écrire, pour C petit :

$$f(C) \sim C^k, k > 0.$$

Quand C est petit, plus k est petit, plus la queue est épaisse. Pour s'en convaincre, on effectue quelques tracés (voir l'annexe 6).

Finalement,

$$V(C) \sim C^{1-\gamma+k} \tag{3.1}$$

Pour obtenir l'utilité espérée, il faut intégrer l'utilité conditionnelle entre 0 et \bar{C} une valeur positive de C . Les primitives de $V(C)$ sont, d'après (3.1), proportionnelles à :

$$C^{2-\gamma+k}.$$

Quand C tend vers 0, cette valeur sera finie (et l'intégration sera donc possible) si et seulement si :

$$2 - \gamma + k > 0.$$

Autrement dit, pour que le calcul de l'utilité espérée pose problème, la queue ne doit pas être seulement épaisse, elle doit être suffisamment épaisse (petit k). De même, l'agent doit être suffisamment averse au risque (grand γ).

Cet exemple donne l'intuition de deux hypothèses centrales du *dismal theorem* qui ne sont pas toujours respectées. Il faut, d'une part, que la fonction d'utilité choisie donne une utilité négative non bornée quand la consommation tend vers 0. Une société serait alors toujours prête à payer une somme infinie pour échapper à une catastrophe qui détruirait la Terre, même si la probabilité de cette catastrophe était infinitésimale. Cela semble contre-intuitif, et surtout, ce n'est pas le cas de toutes les fonctions d'utilité. D'autre part, le fait que la loi suivie par la consommation présente une queue épaisse quand la consommation tend vers 0 nécessite un choix particulier de fonction de densité.

Weitzman (2009b) répond à certaines de ces remarques. Le message principal est que si, en effet, le *dismal theorem* dans sa forme mathématique ne s'applique pas toujours, il s'agit davantage pour Weitzman de montrer les limites de la CBA dans le cadre du changement climatique, un cadre incertain : "[the] intuitive examples are frankly aimed at sowing a few seeds of doubt that the standard CBA of climate change is fairly representing structural uncertainties, and therefore its conclusions might be more shaky than is commonly acknowledged". La désutilité espérée, dans bien des cas, sera bornée mais anormalement grande. La CBA ne présentera alors pas grand intérêt.

4 Incertitude normative

Jusqu'à présent, nous avons abordé trois sources d'incertitude : l'incertitude sur la croissance, sur le rendement du capital, et sur les réchauffement climatique. Ces incertitudes sont empiriques : elles concernent des états du monde, et peuvent être résolues par des observations de la réalité. Pour connaître la croissance en 2100 avec certitude, il suffit d'attendre quelques décennies que les chiffres soient publiés.

Il existe un autre type d'incertitude : l'incertitude normative, ou incertitude morale. L'incertitude normative ne porte pas sur les possibles états du monde, mais sur la valeur qu'il faut leur accorder. Cette incertitude peut être réduite par des arguments philosophiques et politiques, et non par la simple observation de données empiriques. Attendre quelques décennies et observer des données ne nous dira pas à quel point il est important en soi de réduire les inégalités, par exemple. Il existe différentes manières de tenir compte de l'incertitude normative. MacAskill, Bykvist et Ord (2020) font une introduction récente à la prise de décision en incertitude morale.

Dans cette partie, nous commençons par justifier que l'escompte est concerné par l'incertitude normative (4.1). Nous faisons ensuite une proposition pour intégrer l'incertitude normative dans la formule de Ramsey (4.2). Nous terminons en considérant différentes pistes pour prolonger cette analyse (4.3).

4.1 L'incertitude normative sur l'escompte

Dans sa forme la plus simple, la formule de Ramsey permet de déterminer le taux d'escompte social en fonction de trois valeurs :

$$r = \rho + \gamma g.$$

Le taux de croissance g est une variable empirique. Le taux de préférence pure pour le présent ρ et le coefficient d'aversion à l'inégalité intertemporelle γ sont des paramètres normatifs. Il y a deux raisons de considérer que les valeurs de ces deux paramètres sont incertaines.

La première raison est l'existence d'arguments raisonnables en faveur de différentes valeurs possibles pour ρ et γ . Greaves (2017) passe en revue ces arguments. La bonne valeur de la préférence pure pour le présent a été particulièrement discutée. L'argument principal en faveur d'un $\rho = 0$ est l'impartialité, et remonte à Sidgwick (1874) : « the time at which a man exists cannot affect the value of his happiness from a universal point of view ». Ramsey lui-même partage ce point de vue : « we do not discount later enjoyments in comparison with earlier ones, a practice which is ethically indefensible and arises merely from the weakness of the imagination » (Ramsey 1928). Cependant, certains économistes comme Arrow (1999) ont défendu un $\rho > 0$. Le plus fort de leurs arguments est que l'impartialité demanderait un trop grand sacrifice de la part des générations présentes. Même si cette position semble moins solide, il paraît raisonnable d'accorder une certaine probabilité à la possibilité que ρ soit strictement positif.

Il y a une deuxième raison d'être incertain des bonnes valeurs de ρ et γ : les économistes ne sont pas d'accord entre eux. Weitzman (2001) est le premier à avoir mis au jour l'ampleur des désaccords sur le taux d'escompte. Pour son article, il conduit un sondage dans lequel il demande à des docteurs en économie leur meilleure estimation du taux d'escompte social. Les 2160 réponses vont de -3% à 27%, avec un taux d'escompte moyen à 3,96%, et un écart-type de 2,94%. Drupp et al. (2018) conduisent un sondage similaire, avec deux différences principales : les économistes interrogés sont uniquement des spécialistes de l'escompte, et une question est posée pour chaque paramètre de la formule de Ramsey. Cette seconde différence permet de s'intéresser plus précisément à l'incertitude sur ρ et γ . Pour le taux de préférence pure pour

le présent, les réponses vont de 0 à 8%, avec une moyenne à 1,1% et un écart-type de 1,47%. Le mode est à 0, en accord avec la position dominante dans la littérature. Pour γ , les réponses vont de 0 à 5, avec une moyenne à 1,35 et un écart-type de 0,85. Ces réponses sont bien moins dispersées que celles qu’obtient Weitzman (2001). Cependant, des divergences demeurent, et justifient d’être incertain des valeurs de ρ et γ .

4.2 La formule de Ramsey en incertitude normative

Pour dépasser les désaccords sur le taux d’escompte, Weitzman (2001) propose d’utiliser le facteur d’escompte moyen des répondants. On peut noter deux limites de cette approche. La première est qu’elle ne fait pas de distinction entre incertitude normative et incertitude empirique. Le taux de croissance de la consommation par tête g est une variable empirique. Pour tenir compte de l’incertitude sur la croissance future, il existe de nombreuses méthodes empiriques, dont certaines ont été abordées dans les parties précédentes. Pour ρ et γ , on ne peut pas utiliser de données empiriques. Il paraît donc plus justifié de recourir à l’opinion d’experts pour ces paramètres que pour g . Une deuxième limite de l’approche de Weitzman (2001) est qu’elle ignore les conséquences du choix du taux d’escompte. En incertitude empirique, l’utilité espérée ne dépend pas uniquement des probabilités des différents états du monde, mais aussi de l’utilité dans chacune des issues possibles. De manière analogue, MacAskill et Ord (2020) argumentent en faveur de la maximisation de la valeur espérée du choix (*expected choiceworthiness*) en incertitude normative. Nous faisons ici une proposition pour tenir compte de l’incertitude normative, en tentant de résoudre ces deux limites de l’approche de Weitzman (2001).

Considérons un investissement marginal en l’année 0 qui rapporte e^{rt} en l’année t . Deux actions sont possibles : investir (a_1), et ne pas investir (a_0). La fonction d’utilité instantanée est de la forme :

$$u_\Gamma : c \mapsto \frac{c^{1-\Gamma}}{1-\Gamma}.$$

Le coefficient relatif d’aversion pour le risque Γ est constant dans le temps, mais incertain, tout comme le taux de préférence pure pour le présent, noté P . Le couple (P, Γ) est aléatoire et suit une certaine distribution, qui représente les croyances sur les valeurs de ces paramètres. Pour simplifier, on suppose que le taux de croissance de la consommation g est connu et constant, de telle sorte que la consommation au temps t vaut $c_t = c_0 e^{gt}$.

Pour chaque valeur possible de (P, Γ) , une fonction de valeur $v_{\rho, \gamma}$ est définie sur l’ensemble des actions possibles par :

$$v_{\rho, \gamma} : a \mapsto \begin{cases} u_\gamma(c_0) + e^{-\rho t} u_\gamma(c_t) & \text{si } a = a_0 \\ u_\gamma(c_0) - u'_\gamma(c_0) + e^{-\rho t} [u_\gamma(c_t) + e^{rt} u'_\gamma(c_t)] & \text{si } a = a_1 \end{cases}$$

Il existe plusieurs manières de calculer la valeur espérée d’un choix en incertitude normative. L’approche la plus répandue est celle que Dietrich et Jabarian (2019) appellent « *Standard Expectationalism* » :

$$V(a) = \mathbb{E} [v_{P, \Gamma}(a)].$$

Finalement, la décision optimale est celle qui a la meilleure valeur espérée :

$$a^* = \operatorname{argmax}_{a \in \{a_0, a_1\}} V(a).$$

Investir est optimal si et seulement si :

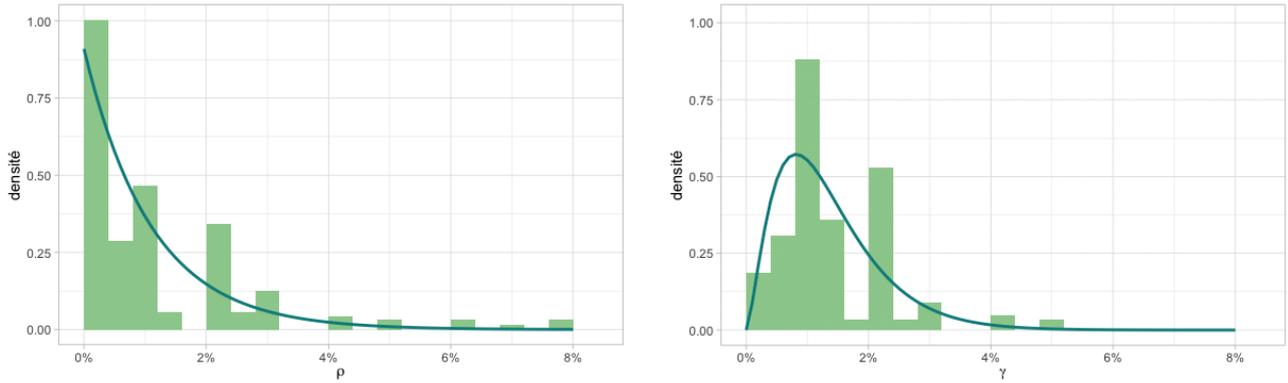
$$\begin{aligned}
V(a_1) &\geq V(a_0) \\
\mathbb{E} [u_\Gamma(c_0) - u'_\Gamma(c_0) + e^{-Pt}[(u_\Gamma(c_t) + e^{rt}u'_\Gamma(c_t))] &\geq \mathbb{E} [u_\Gamma(c_0) + e^{-Pt}u_\Gamma(c_t)] \\
e^{rt}\mathbb{E} [e^{-Pt}u'_\Gamma(c_t)] &\geq \mathbb{E} [u'_\Gamma(c_0)],
\end{aligned}$$

ou encore :

$$r \geq \frac{-1}{t} \ln \frac{\mathbb{E} [e^{-Pt}u'_\Gamma(c_t)]}{\mathbb{E} [u'_\Gamma(c_0)]} \equiv r_t^*. \quad (4.1)$$

Ainsi, il est optimal d'investir à condition que le rendement du projet soit supérieur à un certain seuil. Par définition du taux d'escompte, r_t^* est le taux d'escompte optimal en incertitude normative.

Quelles sont nos croyances sur les bonnes valeurs pour ρ et γ ? Le graphique 4.1 représente les histogrammes des réponses collectées par Drupp et al. (2018) pour le taux de préférence pure pour le présent et pour l'aversion à l'inégalité intertemporelle. À la manière de Weitzman (2001), nous choisissons des lois gamma qui ont l'air bien ajustées aux réponses du sondage. Leurs densités sont représentées par une ligne continue sur le graphique. Pour P, il s'agit d'une loi exponentielle, qui est un cas particulier de loi gamma.



Graphique 4.1 – Histogrammes des réponses collectées par Drupp et al. (2018) pour les valeurs de ρ et γ

On suppose alors que P suit une loi exponentielle de moyenne m , et que Γ suit une loi gamma de moyenne μ et de variance σ^2 . On suppose de plus que P et Γ sont indépendantes, c'est-à-dire que l'impartialité temporelle et l'aversion à l'inégalité intertemporelle sont deux questions morales indépendantes. Après des calculs détaillés en annexe, on obtient :

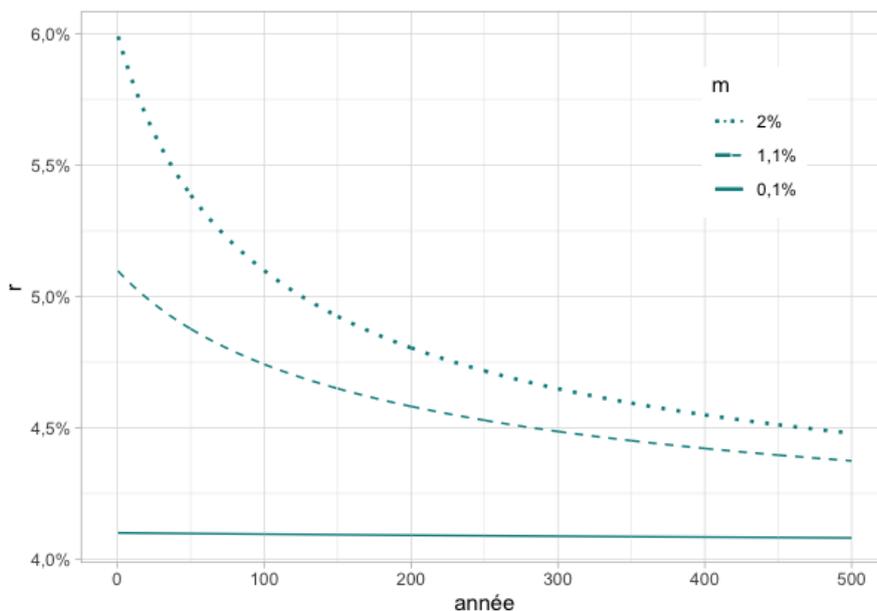
$$r_t^* = \frac{1}{t} \ln(1 + mt) + \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2 g t}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} \right). \quad (4.2)$$

Il s'agit de la formule de Ramsey en incertitude normative, quand les croyances sur ρ et γ suivent des distributions exponentielle et gamma, respectivement. Le taux d'escompte est toujours décomposé en deux termes : le premier correspond à la préférence pure pour le présent, et le second à l'effet de richesse.

Intéressons-nous d'abord à l'effet de l'incertitude sur ρ , et fixons γ . Quand $m = 0$, on est certain que la préférence pure pour le présent doit être nulle. On retrouve alors :

$$r_t^* = \frac{1}{t} \ln(1 + 0 \times t) + \gamma g = \gamma g,$$

comme dans la formule de Ramsey classique. Quand $m > 0$, on remarque que le taux d'escompte diminue avec le temps, alors que P, γ et g ne varient pas avec t . Le graphique 4.2 montre l'évolution de r_t^* pour $\gamma = 2$, $g = 2\%$, et pour trois valeurs de m .



Graphique 4.2 – Évolution de r_t^* pour $\gamma = 2$, $g = 2\%$, et pour trois valeurs de m

Weitzman (2007) considère qu'un « trio de deux » est une manière raisonnable de calibrer la formule de Ramsey :

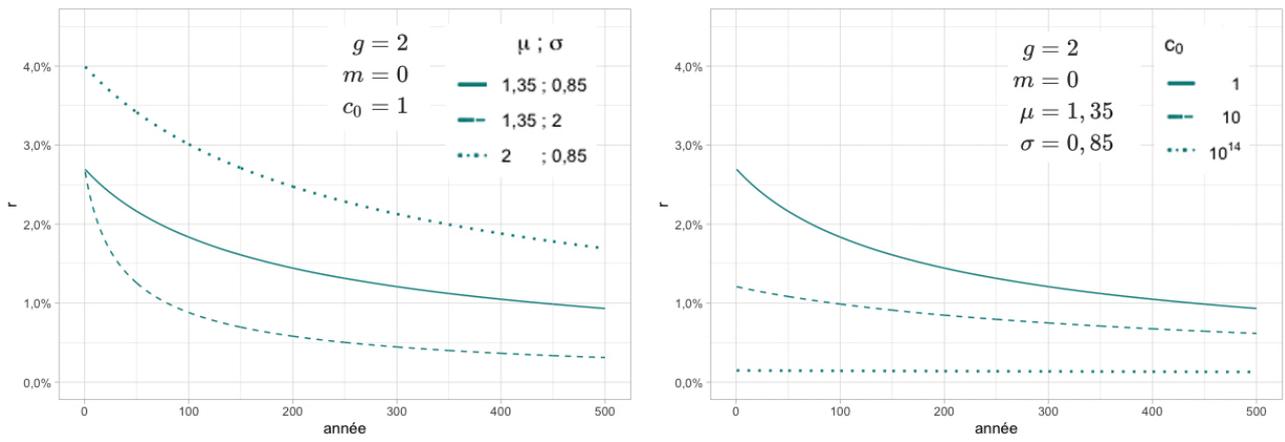
$$\rho = 2\%, \quad g = 2\%, \quad \gamma = 2.$$

Ce choix de paramètres donne un taux d'escompte constant $r = 6\%$. Dans le cas où l'on est incertain de la bonne valeur de ρ , et que 2% n'est que l'estimation moyenne de la préférence pure pour le présent, on obtient la courbe supérieure du graphique 4.2. Le taux d'escompte vaut toujours 6% quand t est proche de 0, mais il diminue avec le temps. La courbe intermédiaire représente r_t^* quand m est la moyenne des opinions sur ρ rassemblées par Drupp et al. (2018). La troisième courbe correspond à $m = 0,1\%$, soit la valeur de ρ recommandée par Stern et Britain (2007). On voit que pour une valeur de ρ si proche de 0, raisonner en incertitude normative ne change presque rien à l'échelle de 500 ans.

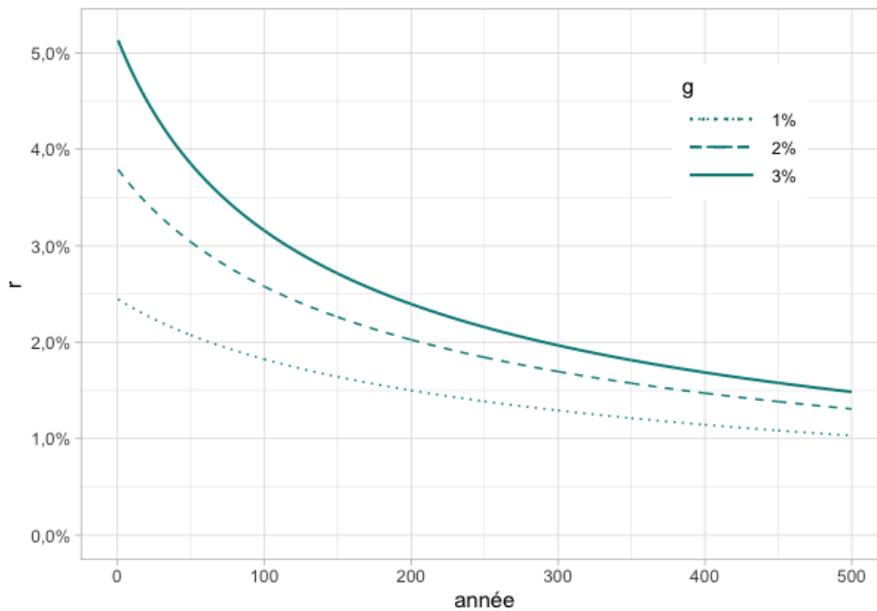
Tournons-nous à présent vers l'effet de richesse, et fixons $m = 0$. On montre en annexe que quand σ^2 tend vers 0, le second terme de l'équation 4.2 tend vers μg . Autrement dit, quand l'incertitude sur γ tend vers 0, on retrouve l'effet de richesse classique. Quand $\sigma^2 > 0$, l'effet de richesse diminue lui aussi avec le temps. Cette diminution est d'autant plus rapide que l'incertitude sur γ est grande. Le graphique 4.3 montre l'évolution de l'effet de richesse pour différentes valeurs de μ , σ , et c_0 . La présence de la consommation initiale dans cette formule interroge. Quand c_0 vaut 10^{14} — l'ordre de grandeur de la consommation finale mondiale en 2019 en dollars — l'effet de richesse est très faible, de l'ordre de $0,1\%$. La valeur de l'effet de richesse serait alors très sensible à l'unité géographique et à l'unité monétaire considérées. Il semble plus raisonnable de fixer $c_0 = 1$. Dans ce cas, on retrouve le même résultat que pour l'incertitude sur ρ : l'effet de richesse tend vers sa valeur classique quand t tend vers 0, et diminue quand t augmente. L'équation 4.2 se réécrit alors :

$$r_t^* = \frac{1}{t} \ln(1 + mt) + \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu} gt\right). \quad (4.3)$$

Le graphique 4.4 représente la formule 4.3 calibrée par les moments empiriques de Drupp et al. (2018) : $m = 1,1$, $\mu = 1,35$ et $\sigma = 0,85$. L'incertitude normative sur ρ et γ fournit un argument supplémentaire en faveur d'un taux d'escompte décroissant.



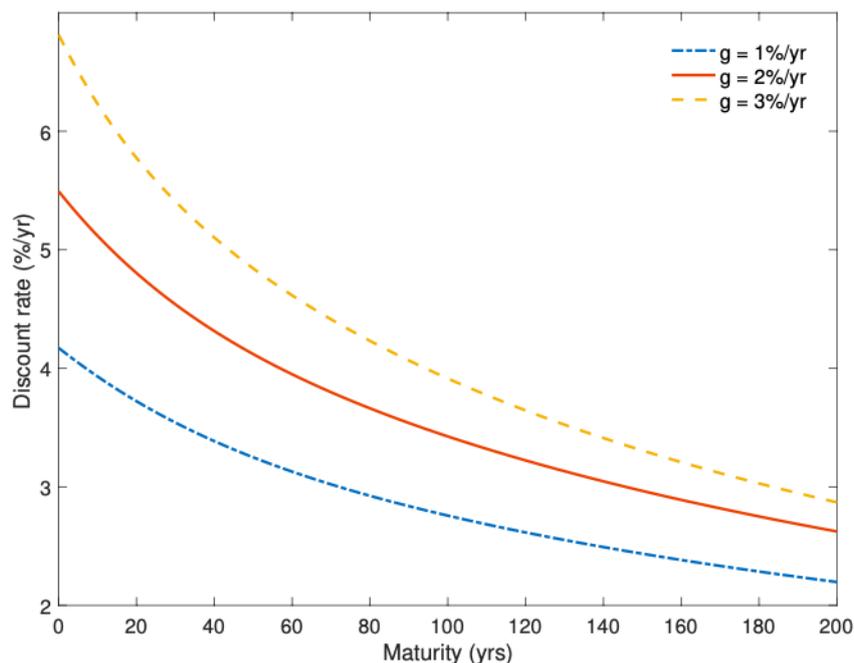
Graphique 4.3 – Évolution de l'effet de richesse pour différentes valeurs de μ , σ , et c_0



Graphique 4.4 – Évolution de r_t^* pour $m = 1,1$, $\mu = 1,35$ et $\sigma = 0,85$

4.3 Pistes de prolongements

Dans un article paru en avril 2021, Millner et Heal (2021) cherchent eux aussi à intégrer l’incertitude normative dans la détermination du taux d’escompte. Le cadre qu’ils utilisent pour cela est différent de celui que nous avons développé dans la partie précédente. En particulier, il ne demande pas de faire d’hypothèses sur la distribution des croyances sur (P, Γ) — ce qui rend aussi son expression mathématique plus compliquée. En calibrant leur modèle sur les données issues de Drupp et al. (2018), Millner et Heal (2021) obtiennent les résultats représentés sur le graphique 4.5. En comparant ce graphique avec celui que nous avons obtenu (graphique 4.4), on constate que le taux d’escompte diminue avec le temps dans les deux modèles, à un rythme qui semble comparable. Toutefois, les taux d’escompte sont plus grands d’environ 1,5 point chez Millner et Heal (2021). Il serait intéressant de comparer plus en détails ces deux approches de l’incertitude normative, afin de comprendre l’origine de cette différence.



Graphique 4.5 – Évolution du taux d’escompte en incertitude normative, tiré de Millner et Heal (2021)

D’autres questions restent ouvertes à propos du modèle développé dans la section précédente. L’hypothèse d’indépendance de P et Γ mériterait d’être plus longuement discutée, afin de mieux comprendre ce qu’elle signifie, et à quelle point elle est plausible. Il serait intéressant d’étudier la manière dont l’incertitude normative se combine avec les différentes incertitudes empiriques, en particulier celle sur la croissance future. Il reste également à mieux comprendre pourquoi, intuitivement, l’incertitude normative entraîne la décroissance du taux d’escompte. Le rôle de la consommation initiale c_0 dans l’équation 4.2 reste lui aussi à éclaircir.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes restreints à l’incertitude normative dans le cadre utilitariste escompté classique. Comme le notent Dietrich et Jabarian (2019), l’incertitude normative peut aussi concerner un cadre d’analyse tout entier. Or, il y a des raisons de douter de la validité du modèle utilitariste escompté classique. Certains des économistes ont d’importantes réserves par rapport à ce cadre d’analyse, comme en attestent ces deux citations tirées de l’enquête de Drupp et al. (2018) :

« The search for THE discount rate, if that is your project, is deeply flawed. »

« Instead of imposing a [social welfare function] and calculate the corresponding optimum, it is ‘better’ to depict a set of feasible paths of consumption, production, temperature, income distribution, etc. and let the policy maker make a choice. »

Il existe d'autres approches pour faire des choix qui concernent l'avenir. Le philosophe Hans Jonas a par exemple proposé une « éthique du futur » qui ne repose pas sur des calculs coûts-bénéfices, mais sur des principes déontologiques, en particulier quand les décisions à prendre mettent en jeu l'avenir de l'humanité (Jonas 1979). Plusieurs économistes ont développé des cadres d'analyse alternatifs au cadre utilitariste escompté (Chichilnisky 1996 ; Li et Löfgren 2000 ; Ayong Le Kama et Schubert 2002 ; Fleurbaey et Zuber 2015). La question de l'incertitude normative sur le cadre utilitariste escompté lui-même reste à explorer.

5 Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons exploré quatre sources d'incertitudes susceptibles d'influencer le taux d'escompte, et nous avons étudié la nature de leurs liens.

Dans une première partie, nous avons évoqué les incertitudes sur la croissance, en nous appuyant notamment sur la formule de Ramsey pour exprimer le taux d'escompte social à partir de la préférence pure pour le présent, du taux de croissance et de l'aversion pour le risque. Nous avons ici constaté que les incertitudes sur la croissance affectent le taux via l'effet de précaution : plus la croissance de la consommation est incertaine, plus il est bon d'investir pour faire face à une croissance potentiellement faible. Notre travail de calibration de la formule de Ramsey nous a toutefois amenés à penser que l'hypothèse de normalité du taux de croissance est irréaliste, et que des méthodes plus sophistiquées de la prévision de la croissance seraient mieux adaptées qu'une simple estimation sur des données historiques. Enfin, lorsque l'on relâche l'hypothèse que le taux d'escompte est constant, la plupart des méthodes envisagées conduisent à des taux d'escompte décroissants. La décroissance du taux d'escompte est justifiée par le fait que l'incertitude sur la croissance augmente avec le temps. L'effet de précaution augmente donc lui aussi.

Une autre source d'incertitude, que nous avons considérée dans une seconde partie, est celle sur le taux de rendement du capital, c'est-à-dire sur la pertinence des investissements concurrents. Cette incertitude est le cadre de la controverse Gollier-Weitzman, au sein de laquelle deux raisonnements en apparence similaire aboutissent à des conclusions opposées : un taux d'escompte décroissant ou bien croissant. Et c'est finalement une prise en compte plus globale de l'incertitude qui permettra aux deux protagonistes de parvenir à une conclusion commune : le taux d'escompte effectif le plus efficace face à cette incertitude est un taux décroissant, dans une logique de précaution. Toutefois, cette conclusion n'est pas jugée tout à fait satisfaisante par Traeger, pour qui les deux effets Gollier et Weitzman existent bien, dans des cadres généralement différents, mais parfois même coexistent. Toutefois, ces deux dynamiques ont un effet commun : elles rendent un projet d'autant plus attractif que sa maturité est lointaine. Ces conclusions vont donc globalement dans le même sens que celles des incertitudes sur la croissance, augmentant le poids associé aux projets au fil du temps. Il faut toutefois les nuancer (notamment pour l'orientation de politiques publiques) puisque, comme le rappelle Traeger, ces conclusions proviennent de modèles très simplifiés.

Nous avons ensuite examiné les incertitudes sur le réchauffement climatique, ce qui est crucial étant donné que d'une part, le taux d'escompte joue un rôle important pour les investissements climatiques, et que d'autre part les paramètres liés au réchauffement climatique sont très incertains. Le "climate beta" joue sur l'escompte de la façon suivante : s'il est négatif, le projet est assurantiel et on escompte moins qu'en l'absence de risque. S'il est positif, on escompte plus car les bénéfices des projets sont grands dans les "bons états du monde". Dietz, Gollier et Kessler éclairent le débat autour du signe du bêta : Sandsmark et Vennemo aboutissent à un bêta négatif car la principale source d'incertitude est le réchauffement climatique, Nordhaus à un bêta positif car il choisit comme source principale d'incertitude la productivité. Des simulations sur DICE permettent de montrer qu'en prenant en compte ces deux canaux, le *climate beta* est positif, mais cela ne signifie pas qu'il faille utiliser un taux d'escompte plus grand pour les projets d'investissement climatique, notamment en raison des limites des modèles CCAPM et DICE/RICE. Une de ces limites est explorée par Weitzman, qui prend en compte les incertitudes avec une approche bayésienne. En présence de distributions à queues épaisses, les agents

seraient toujours prêts à payer une somme colossale pour empêcher un évènement qui ferait chuter leur consommation à 0, même si cet évènement a une chance infinitésimale de se produire, et l'escompte temporelle ne joue plus aucun rôle : c'est le "dismal theorem". Ce théorème a été critiqué par Nordhaus qui souligne que ses conditions d'application sont restrictives. Cependant, d'après Weitzman, il s'agit davantage pour lui de montrer les failles d'un type d'analyse auquel on accorde une confiance excessive. Même hors du champ d'application formel du théorème, on peut aboutir à des situations où l'analyse coûts-bénéfices ne présente pas grand intérêt.

Nous avons finalement abordé une forme d'incertitude qui avait été largement ignorée jusqu'à récemment : l'incertitude normative. Elle traduit le fait que nous ne sommes pas sûrs de nos positions morales. Dans le cadre de la formule de Ramsey, le raisonnement en incertitude normative est justifié par la présence d'arguments raisonnables en faveur de différentes valeurs de la préférence pure pour le présent et de l'aversion à l'inégalité intertemporelle, ainsi que par l'absence de consensus sur ces deux paramètres normatifs. Le modèle que nous avons proposé conduit à une nouvelle version de la formule de Ramsey. Cette formule est en continuité avec la formule classique, et conduit à des taux d'escompte similaires pour le futur proche. En revanche, lorsqu'on considère le long terme, l'incertitude normative a pour effet de faire baisser le taux d'escompte. Plus l'incertitude normative est forte, plus le taux d'escompte diminue vite avec le temps. Ce modèle simple pourrait être prolongé en intégrant d'autres formes d'incertitude, et en le confrontant au modèle similaire développé récemment par Millner et Heal (2021). Notre résultat principal est cohérent avec cet article, et avec l'effet de l'incertitude empirique sur le taux d'escompte : en présence d'incertitude, le taux d'escompte social de la consommation diminue avec le temps.

Prises individuellement, les incertitudes sur la croissance, le taux de rendement du capital et les paramètres normatifs de l'escompte conduisent chacune à utiliser un taux d'escompte décroissant. La forme particulière de l'incertitude sur le réchauffement climatique montre les limites de l'analyse coûts-bénéfices. Étudier les incertitudes de manière isolée permet de bien comprendre leurs effets respectifs. Dans la réalité, les responsables politiques doivent faire face à toutes ces formes d'incertitude en même temps. La manière dont elles se combinent n'est pas encore claire, mais il semble plausible qu'elles s'additionnent, voire qu'elles se multiplient, plutôt qu'elles se compensent. Nous rejoignons Millner et Heal (2021) sur le fait que de nombreux arguments convergent vers la même conclusion : l'incertitude doit nous amener à plus tenir compte du futur dans nos décisions, et en particulier du futur à long terme. La question de l'escompte est un champ de recherche encore jeune, sur lequel beaucoup d'avancées ont été faites dans les vingt dernières années. Nous ne comprenons probablement pas encore très bien comment nous devons tenir compte du long terme dans nos décisions, et il est possible que nous nous trompions encore sur beaucoup de choses. Étant donnée l'importance de cette question, nous espérons que nous continuerons à y voir de plus en plus clair. En attendant, dans le doute, escomptons moins.

Références

- Arrow, Kenneth J. (1999). « Discounting, morality, and gaming ». In : Portney, P.R. et J.P. Weyant. *Discounting and intergenerational equity*.
- Ayong Le Kama, A. et K. Schubert (2002). « The Consequences of an Endogenous Discounting Depending on Environmental Quality ». In :
- Cass, David (1965). « Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation ». In : *The Review of Economic Studies* 32.3, p. 233. ISSN : 00346527. DOI : 10.2307/2295827. URL : <https://academic.oup.com/restud/article-lookup/doi/10.2307/2295827> (visité le 08/04/2021).
- Chichilnisky, Graciela (1996). « An axiomatic approach to sustainable development ». In : *Social Choice and Welfare* 13.2, p. 231-257. ISSN : 1432-217X. DOI : 10.1007/BF00183353. URL : <https://doi.org/10.1007/BF00183353> (visité le 09/05/2021).
- Dietrich, Franz et Brian Jabarian (2019). « Expected Value under Normative Uncertainty ». In : *SSRN Electronic Journal*. ISSN : 1556-5068. DOI : 10.2139/ssrn.3466833. URL : <https://www.ssrn.com/abstract=3466833> (visité le 04/05/2021).
- Dietz, Simon, Christian Gollier et Louise Kessler (2018). « The climate beta ». In : *Journal of Environmental Economics and Management* 87, p. 258-274. ISSN : 00950696. DOI : 10.1016/j.jeeem.2017.07.005. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0095069617304734> (visité le 11/05/2021).
- Drupp, Moritz A. et al. (2018). « Discounting Disentangled ». In : *American Economic Journal : Economic Policy* 10.4, p. 109-134. ISSN : 1945-7731, 1945-774X. DOI : 10.1257/pol.20160240. URL : <https://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/pol.20160240> (visité le 04/05/2021).
- Fleurbay, Marc et Stéphane Zuber (2015). « Discounting, beyond Utilitarianism ». In : *Economics : The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*. ISSN : 1864-6042. DOI : 10.5018/economics-ejournal.ja.2015-12. URL : <http://www.economics-ejournal.org/economics/journalarticles/2015-12> (visité le 09/05/2021).
- Gollier, Christian (2004). « Maximizing the Expected Net Future Value as an Alternative Strategy to Gamma Discounting ». In : *Finance Research Letters* 1 (2).
- (2005). « Quel taux d'actualisation pour quel avenir ? » In : *Revue française d'économie* 19.4, p. 59-81. ISSN : 0769-0479. DOI : 10.3406/rfeco.2005.1560. URL : https://www.persee.fr/doc/rfeco_0769-0479_2005_num_19_4_1560 (visité le 11/05/2021).
- (2011). « On the Underestimation of the Precautionary Effect in Discounting ». In : *The Geneva Risk and Insurance Review* 36.2, p. 95-111. ISSN : 1554-964X, 1554-9658. DOI : 10.1057/grir.2011.6. URL : <http://link.springer.com/10.1057/grir.2011.6> (visité le 02/05/2021).
- (2012). *Pricing the Planet's Future : The Economics of Discounting in an Uncertain World*. en. 1^{re} éd. Princeton University Press. ISBN : 978-0-691-14876-2 978-1-4008-4540-8. DOI : 10.23943/princeton/9780691148762.001.0001. URL : <http://princeton.universitypressscholarship.com/view/10.23943/princeton/9780691148762.001.0001/upso-9780691148762> (visité le 08/04/2021).
- Gollier, Christian et Martin Weitzman (2010). « How should the distant future be discounted when discount rates are uncertain ? » In : *Economics Letters* 107.3, p. 350-353. ISSN : 01651765. DOI : 10.1016/j.econlet.2010.03.001. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165176510000868> (visité le 11/05/2021).
- Görgen, Maximilian et al. (2018). « Carbon Risk ». In : *University of Augsburg, Queen's University*. URL : <https://www.cepweb.org/wp-content/uploads/2017/12/Jacob-paper-compressed.pdf>.
- Greaves, Hilary (2017). « Discounting for Public Policy : a Survey ». In : *Economics and Philosophy* 33.3, p. 391-439. ISSN : 0266-2671, 1474-0028. DOI : 10.1017/S0266267117000062. URL : https://www.cambridge.org/core/product/identifrier/S0266267117000062/type/journal_article (visité le 02/05/2021).
- Ined (2020). *Population de la France - séries longues*. ined.fr. URL : <https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/bases-donnees/population-de-la-france-series-longues/> (visité le 09/05/2021).

- Insee (2020). *Évolution du produit intérieur brut et de ses composantes*. insee.fr. URL : https://www.insee.fr/fr/statistiques/2830613#tableau-figure1_radio1 (visité le 09/05/2021).
- Jonas, Hans (1979). *Das Prinzip Verantwortung. Versuch einer Ethik für die technologische Zivilisation*. Frankfurt am Main.
- Keynes, John Maynard (1936). *The general theory of employment, interest and money*. London : Macmillan, 1936. URL : <https://search.library.wisc.edu/catalog/999623618402121>.
- Koopmans, Tjalling (1963). *On the Concept of Optimal Economic Growth*. Cowles Foundation Discussion Paper 163. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University. URL : <https://econpapers.repec.org/paper/cwlcwldpp/163.htm> (visité le 11/05/2021).
- Li, Chuan-Zhong et Karl-Gustaf Löfgren (2000). « Renewable Resources and Economic Sustainability : A Dynamic Analysis with Heterogeneous Time Preferences ». In : *Journal of Environmental Economics and Management* 40.3, p. 236-250. ISSN : 00950696. DOI : 10.1006/jeem.1999.1121. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S009506969991121X> (visité le 09/05/2021).
- Lucas, Robert E. (1978). « Asset Prices in an Exchange Economy ». In : *Econometrica* 46.6, p. 1429. ISSN : 00129682. DOI : 10.2307/1913837. URL : <https://www.jstor.org/stable/1913837?origin=crossref> (visité le 11/05/2021).
- MacAskill, William, Krister Bykvist et Toby Ord (2020). *Moral Uncertainty*. 1^{re} éd. Oxford University Press. ISBN : 978-0-19-872227-4 978-0-19-178910-6. DOI : 10.1093/oso/9780198722274.001.0001. URL : <https://oxford.universitypressscholarship.com/view/10.1093/oso/9780198722274.001.0001/oso-9780198722274> (visité le 02/05/2021).
- MacAskill, William et Toby Ord (2020). « Why Maximize Expected Choice-Worthiness?1 ». In : *Noûs* 54.2, p. 327-353. ISSN : 0029-4624, 1468-0068. DOI : 10.1111/nous.12264. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/nous.12264> (visité le 05/05/2021).
- Millner, Antony et Geoffrey Heal (2021). *Choosing the Future : Markets, Ethics, and Rapprochement in Social Discounting*. w28653. Cambridge, MA : National Bureau of Economic Research, w28653. DOI : 10.3386/w28653. URL : <http://www.nber.org/papers/w28653.pdf> (visité le 05/05/2021).
- Nordhaus, William D. (2009). « An Analysis of the Dismal Theorem ». In : *Cowles Foundation Discussion Paper* (No. 1686).
- (2011). « Estimates of the Social Cost of Carbon : Background and Results from the Rice-2011 Model ». In : *SSRN Electronic Journal*. ISSN : 1556-5068. DOI : 10.2139/ssrn.1945844. URL : <http://www.ssrn.com/abstract=1945844> (visité le 11/05/2021).
- Ramsey, F. P. (1928). « A Mathematical Theory of Saving ». In : *The Economic Journal* 38.152, p. 543. ISSN : 00130133. DOI : 10.2307/2224098. URL : <https://www.jstor.org/stable/2224098?origin=crossref> (visité le 08/04/2021).
- Sandsmark, Maria et Haakon Vennemo (2007). « A portfolio approach to climate investments : CAPM and endogenous risk ». In : *Environmental and Resource Economics* 37.4, p. 681-695. ISSN : 0924-6460, 1573-1502. DOI : 10.1007/s10640-006-9049-4. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s10640-006-9049-4> (visité le 11/05/2021).
- Sidgwick, Henry (1874). « The Meaning of Utilitarianism ». In : *The Methods of Ethics*.
- Stern, N. H. et Great Britain, éd. (2007). *The economics of climate change : the Stern review*. OCLC : ocm78555140. Cambridge, UK ; New York : Cambridge University Press. 692 p. ISBN : 978-0-521-70080-1.
- Traeger, Christian P. (2013). « Discounting Under Uncertainty : Disentangling the Weitzman and the Gollier Effect ». In : *SSRN Electronic Journal*. ISSN : 1556-5068. DOI : 10.2139/ssrn.2270459. URL : <http://www.ssrn.com/abstract=2270459> (visité le 11/05/2021).
- Weitzman, Martin (1998). « Why the Far-Distant Future Should Be Discounted at Its Lowest Possible Rate ». In : *Journal of Environmental Economics and Management* 36.3, p. 201-208. ISSN : 00950696. DOI : 10.1006/jeem.1998.1052. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S009506969891052X> (visité le 11/05/2021).
- (2001). « Gamma Discounting ». In : *American Economic Review* 91.1, p. 260-271. ISSN : 0002-8282. DOI : 10.1257/aer.91.1.260. URL : <https://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/aer.91.1.260> (visité le 04/05/2021).

- Weitzman, Martin (2007). « A Review of "The Stern Review on the Economics of Climate Change" ». In : *Journal of Economic Literature* 45.3. Publisher : American Economic Association, p. 703-724. ISSN : 0022-0515. URL : <https://www.jstor.org/stable/27646844> (visité le 08/05/2021).
- (2009a). « On Modeling and Interpreting the Economics of Catastrophic Climate Change ». In : *Review of Economics and Statistics* 91.1, p. 1-19. ISSN : 0034-6535, 1530-9142. DOI : 10.1162/rest.91.1.1. URL : <https://direct.mit.edu/rest/article/91/1/1-19/57734> (visité le 11/05/2021).
- (2009b). « Reactions to the Nordhaus Critique ». In : *Harvard Environmental Economics Program* (Discussion Paper 2009-11).
- (2011). « Fat-Tailed Uncertainty in the Economics of Catastrophic Climate Change ». In : *Review of Environmental Economics and Policy* 5.2, p. 275-292. ISSN : 1750-6816, 1750-6824. DOI : 10.1093/reep/rer006. URL : <https://www.journals.uchicago.edu/doi/10.1093/reep/rer006> (visité le 11/05/2021).
- Weitzman, Martin et Gernot Wagner (2015). *Climate Shock : The Economic Consequences of a Hotter Planet*. Princeton University Press.

Annexes

1 La formule de Ramsey dans un cadre certain

Le programme de l'individu représentatif est :

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (b_t)_{t > 0}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt \right\}$$

sous les contraintes suivantes :

1. positivité de la consommation : $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$
2. contrainte budgétaire instantanée : $\forall t \geq 0, \dot{k}_t = (r_t - n)k_t + w_t - c_t$
3. solvabilité : $\lim_{T \rightarrow \infty} \left[k_T \exp(-\int_0^T r_\tau d\tau) \right] \geq 0$

La hamiltonien associé à ce problème est donné par :

$$\mathcal{H}(c_t, k_t, \lambda_t, t) = e^{-\rho t} u(c_t) + \lambda_t (r_t k_t + w_t - c_t)$$

La condition de premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la covariable d'état λ_t s'écrivent respectivement, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{-\rho t} u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} &= -\dot{\lambda}_t \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \lambda_t &= e^{-\rho t} u'(c_t) \\ \lambda_t r_t &= -\dot{\lambda}_t \end{aligned}$$

En dérivant la condition de premier ordre par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\lambda}_t = -\rho e^{-\rho t} u'(c_t) + e^{-\rho t} \dot{c}_t u''(c_t)$$

D'où :

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{-\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \\ &= \frac{\rho e^{-\rho t} u'(c_t) - e^{-\rho t} \dot{c}_t u''(c_t)}{e^{-\rho t} u'(c_t)} \\ &= \rho + \frac{-c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} \times \frac{\dot{c}_t}{c_t} \end{aligned}$$

En notant $\gamma = \frac{-c_t u''(c_t)}{u'(c_t)}$ et $g = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$, on obtient la formule de Ramsey :

$$r = \rho + \gamma g$$

2 Espérance de l'exponentielle d'une variable aléatoire normale

Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors :

$$\mathbb{E} [e^{-\gamma X}] = e^{-\gamma(\mu - 0,5\gamma\sigma^2)}$$

Démonstration (Gollier 2012) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\gamma X}] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma x} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\gamma x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \end{aligned}$$

Or :

$$-\gamma x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right) - \gamma x + \gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Les deux derniers termes peuvent se factoriser ainsi :

$$\begin{aligned} \gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= \frac{2\mu\gamma\sigma^2 - (\gamma\sigma^2)^2 - x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{-(\mu - \gamma\sigma^2)^2 - x^2 + 2x\mu + 2x(\mu - \gamma\sigma^2) - 2x(\mu - \gamma\sigma^2)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{-(x^2 - (\mu - \gamma\sigma^2))^2 + 2x\mu - 2x\mu + 2x\gamma\sigma^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{-(x^2 - (\mu - \gamma\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + x\gamma \end{aligned}$$

Donc :

$$-\gamma x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{(x^2 - (\mu - \gamma\sigma^2))^2}{2\sigma^2}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\gamma X}] &= \exp\left(-\gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x^2 - (\mu - \gamma\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \exp\left(-\gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \\ &= \exp\left(-\gamma\left(\mu - \gamma\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

où φ est la densité d'une loi normale de moyenne $\mu - \gamma\sigma^2$ et de variance σ^2 .

3 Taux de croissance de la consommation dans un cadre incertain

On se place dans un modèle à deux périodes $t \in \{0, 1\}$. La consommation à la période 1 est incertaine et vaut $c_1 = c_0 e^X$, où $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Gollier (2012) montre que le taux de croissance de la consommation espérée vaut $g = \mu + 0,5\sigma^2$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} g &= \ln \frac{\mathbb{E}[c_1]}{c_0} \\ &= \ln \frac{\mathbb{E}[c_0 e^X]}{c_0} \\ &= \ln \mathbb{E}[e^X] \end{aligned}$$

En utilisant la propriété démontrée dans l'annexe précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} g &= \ln \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ &= \mu + 0,5\sigma^2 \end{aligned}$$

4 Construction du taux de croissance de la consommation par tête

On souhaite étudier le taux de croissance de la consommation par tête. On dispose uniquement de :

- la série des taux de croissance de la consommation finale de 1950 à 2019 (Insee 2020),
- la série de la population française sur la même période (Ined 2020).

Notons C_t la consommation et n_t la population en l'année t . Le taux de croissance de la consommation par tête à l'année $t + 1$ vaut alors :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{C_{t+1} - C_t}{n_{t+1}} - \frac{C_t}{n_t}}{\frac{C_t}{n_t}} &= \frac{n_t}{C_t} \cdot \frac{C_{t+1}}{n_{t+1}} - 1 \\ &= \frac{n_t}{n_{t+1}} \left(1 + \frac{C_{t+1} - C_t}{C_t}\right) - 1 \end{aligned}$$

Cette formule est celle que nous utilisons dans notre code R pour retrouver la croissance de la consommation par tête. Nous appliquons la même correction à la série des taux de croissance du PIB.

5 Code R utilisé pour la calibration de la formule de Ramsey étendue (partie 1.1.3)

```
# ---- Libraries ----  
library(tidyverse)  
library(readxl)  
  
# ---- Import consumption data ----  
# Import data  
df <- read_excel("econ-gen-pib-composante.xlsx")  
  
# Format data
```

```

df <- df %>%
  slice(c(3, 5, 8)) %>%
  t() %>%
  as_tibble() %>%
  slice(-1) %>%
  select(t=1, pib=2, c=3) %>%
  mutate(
    t = str_replace(t, "\\(r\\)", ""),
    t = t %>% as.integer() %>% as.character() %>% parse_date("%Y"),
    pib = as.numeric(pib),
    c = as.numeric(c)
  )

# Import population series
pop_df <- read_excel("Donne%CC%81es_annexes_EN_12122020.xlsx", sheet = 2)

# Format population data
pop_df <- pop_df %>%
  select(t = 1, pop_metro = 2, pop_tot = 3) %>%
  slice(-(1:53)) %>%
  slice(-(72:n())) %>%
  as_tibble() %>%
  mutate(pop = if_else(is.na(pop_tot), pop_metro, pop_tot) %>% as.numeric())

# ---- Calculate consumption growth *per capita* ----
# Calculate n_t / n_{t+1}
pop_df <- pop_df %>%
  mutate(pop_ratio = lag(pop) / pop) %>%
  drop_na(pop_ratio)

# Use population ratio to adjust consumption growth to population
df$pop_ratio <- pop_df$pop_ratio

adjust_pop <- function(x, pop_ratio){pop_ratio * (1 + x) - 1}

df <- df %>%
  mutate(
    c_hab = adjust_pop(c, pop_ratio),
    pib_hab = adjust_pop(pib, pop_ratio)
  )

# ---- Plot growth of consumption per capita ----
df %>% ggplot(aes(x=t, y=c_hab)) +
  geom_line(color="cyan4") +
  geom_point(color="cyan4", size=1) +
  geom_vline(xintercept = as.Date(c("1968-06-01", "2010-06-01")),
            linetype = 2,
            color = "darkseagreen"
  ) +
  xlab("") +
  ylab("") +

```

```

theme_light() +
scale_x_date(limits = as.Date(c('1949-01-01', '2020-01-01')),
  date_labels = "%Y",
  date_breaks = "5 years") +
scale_y_continuous(breaks = round(seq(0, 7.5, by = 1),1),
  labels = paste0(round(seq(0, 7.5, by = 1),1), "%")) +
theme(axis.text.x = element_text(angle = 60, hjust = 1))

# ---- get mean and standard error ----
get_moments <- function (df) {
  df %>%
    select(c_hab, pib_hab) %>%
    summarise(c_mean = mean(c_hab),
              c_std = c_hab %>% var() %>% sqrt(),
              pib_mean = mean(pib_hab),
              pib_std = pib_hab %>% var() %>% sqrt()
    )
}

df_restricted <- df %>%
  filter(t %>% between(as.Date('1968-06-01'), as.Date('2010-06-01')))

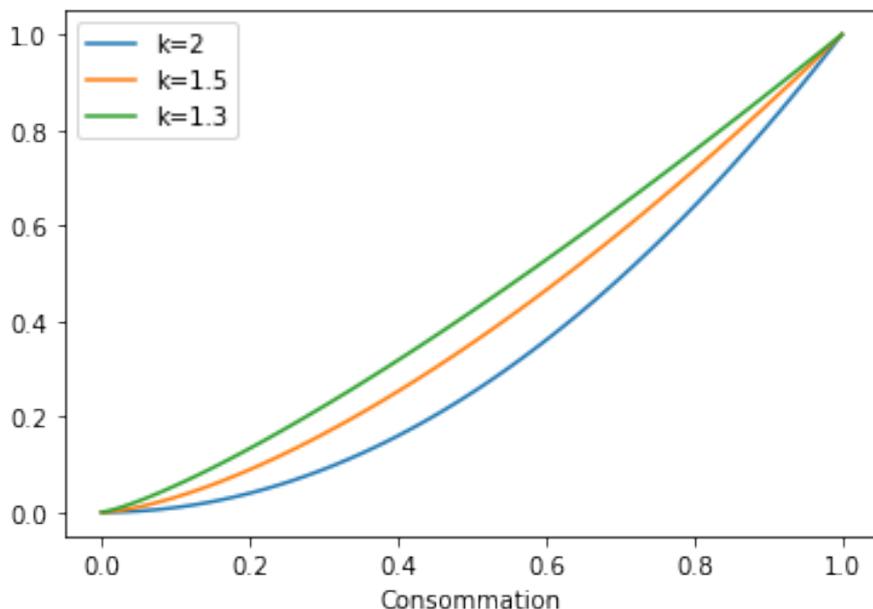
moments <- df %>%
  get_moments() %>%
  bind_rows(df_restricted %>% get_moments()) %>%
  mutate(across(everything(), function (x) {x / 100}))

# ---- calculate discount rates ----
ramsey <- function (g, sigma, rho = 0, gamma = 2) {
  rho + gamma * g - 0.5 * gamma * (gamma + 1) * sigma**2
}

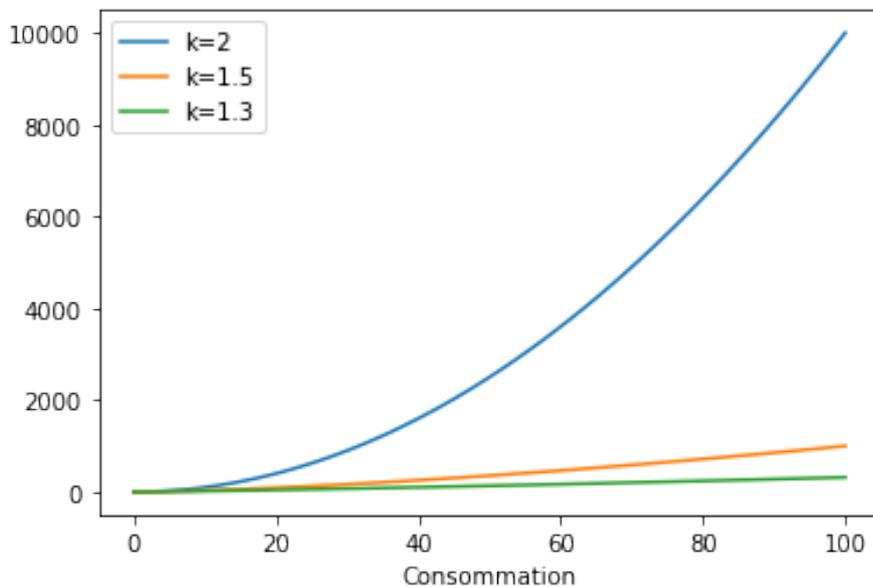
results <- moments %>%
  mutate(
    r_c = ramsey(c_mean, c_std),
    r_pib = ramsey(pib_mean, pib_std)
  )

```

6 Comportement de la loi de puissance pour de petites valeurs de la consommation



Graphique 5.1 – Tracé d'une loi de puissance pour une consommation faible et différentes valeurs de k



Graphique 5.2 – Tracé d'une loi de puissance pour une consommation élevée et différentes valeurs de k

7 Formule de Ramsey avec une incertitude normative sur ρ et sur γ

Partons de l'équation 4.1 :

$$r_t^* = \frac{-1}{t} \ln \frac{\mathbb{E} [e^{-Pt} u'_\Gamma(c_t)]}{\mathbb{E} [u'_\Gamma(c_0)]}.$$

Supposons que P suit une loi exponentielle de paramètre λ , et que Γ suit une loi gamma de paramètres α et β . Ces distributions semblent cohérentes avec les résultats du sondage

mené par Drupp et al. (2018), comme illustré par la figure 4.1. On suppose également que P et Γ sont indépendantes, c'est-à-dire que l'impartialité temporelle et l'aversion à l'inégalité intertemporelle sont deux questions morales indépendantes. On a alors :

$$r_t^* = \frac{-1}{t} \ln \frac{\mathbb{E} [e^{-Pt}] \mathbb{E} [c_t^{-\Gamma}]}{\mathbb{E} [c_0^{-\Gamma}]}.$$

D'une part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-Pt}] &= \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \lambda e^{-\lambda \rho} d\rho \\ &= \frac{\lambda}{t + \lambda} \int_0^{+\infty} (t + \lambda) e^{-(\lambda+t)\rho} d\rho \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + t}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbb{E} [c^{-\Gamma}] = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} c^{-\gamma} e^{-\beta\gamma} \gamma^{\alpha-1} d\gamma.$$

Comme $c^{-\gamma} = e^{-\gamma \ln c}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [c^{-\Gamma}] &= \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \ln c)^\alpha} \times \frac{(\beta + \ln c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + \ln c)\gamma} \gamma^{\alpha-1} d\gamma \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \ln c)^\alpha} \times 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [c_t^{-\Gamma}]}{\mathbb{E} [c_0^{-\Gamma}]} &= \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \ln c_t)^\alpha} \times \frac{(\beta + \ln c_0)^\alpha}{\beta^\alpha} \\ &= \left(\frac{\beta + \ln c_0}{\beta + \ln c_t} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \ln(c_t) &= \ln(c_0 e^{gt}) \\ &= \ln(c_0) + gt. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\mathbb{E} [c_t^{-\Gamma}]}{\mathbb{E} [c_0^{-\Gamma}]} = \left(\frac{\beta + \ln c_0}{\beta + \ln c_0 + gt} \right)^\alpha.$$

Finalement :

$$r_t^* = \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{t}{\lambda} \right) + \frac{\alpha}{t} \ln \left(1 + \frac{gt}{\beta + \ln c_0} \right).$$

En notant $m = \frac{1}{\lambda}$ l'espérance de P, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ l'espérance de Γ et $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$ la variance de Γ , cette formule se réécrit :

$$\begin{aligned} r_t^* &= \frac{1}{t} \ln(1 + mt) + \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \ln \left(1 + \frac{gt}{\frac{\mu}{\sigma^2} + \ln c_0} \right) \\ &= \frac{1}{t} \ln(1 + mt) + \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2 gt}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} \right). \end{aligned}$$

Vérifions que quand l'incertitude normative sur Γ tend vers 0, on retrouve l'effet de richesse classique. On a :

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{\sigma^2 gt}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} = 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2 gt}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} \right) &\underset{\sigma^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mu^2}{\sigma^2 t} \times \frac{\sigma^2 gt}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} \\ &\underset{\sigma^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mu^2 g}{\mu + \sigma^2 \ln c_0} \\ &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{\mu^2 g}{\mu} \\ &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \mu g. \end{aligned}$$

Quand la variance de Γ tend vers 0, l'effet de richesse en incertitude normative tend bien vers l'effet de richesse de la formule classique.